

FM210 - FISICA MATEMATICA I

SECONDA PROVA DI ESONERO [13-10-2014]

1. **(13 punti)**. Una massa puntiforme m si muove su una guida liscia di equazione $y = de^{-x^2/(2d^2)}$ (con $d > 0$) appartenente al piano verticale x - y sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = m(0, -g)$ e di una forza elastica $\mathbf{F}_e = -k(x, y)$ di costante elastica k e centro coincidente con l'origine.
 - (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane le variabili (x, \dot{x}) .
 - (b) Si ricavi la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.
 - (c) Si identifichi una grandezza conservata, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
 - (d) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
 - (e) Si ricavi l'equazione delle curve di livello del sistema e se ne disegni il grafico nel piano delle fasi (x, \dot{x}) al variare della grandezza conservata di cui sopra. Si discuta qualitativamente la natura del moto.

2. **(11 punti)**. Una massa puntiforme m si muove in \mathbb{R}^3 sotto l'effetto di una forza centrale
$$\mathbf{F} = -k \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|(|\mathbf{x}| + \ell)^3},$$
dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $k, \ell > 0$. Si supponga di assegnare un dato iniziale corrispondente ad un momento angolare \mathbf{L} non nullo.
 - (a) Si identifichi il potenziale efficace per il moto radiale e se ne disegni il grafico, al variare di $L := |\mathbf{L}| > 0$.
 - (b) Si disegnino le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ e si discuta qualitativamente la natura del moto sia radiale che complessivo, al variare di $L > 0$.
 - (c) Si determinino tutti i possibili dati iniziali per cui il moto complessivo risultante è periodico e se ne calcoli il periodo nella forma di un integrale definito.

3. **(6 punti)**. Un corpo rigido è costituito da 3 masse puntiformi m disposte ai vertici di un triangolo ABC . Siano: ℓ la lunghezza del lato BC , 2ℓ la lunghezza del lato AC e $2\pi/3$ l'ampiezza dell'angolo al vertice C .
 - (a) Si determini il centro di massa del sistema.
 - (b) Si calcoli la matrice del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.