Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Seconda Prova di Esonero [13-10-2014]

1. (13 punti). Una massa puntiforme m si muove su una guida liscia di equazione $y = de^{-x^2/(2d^2)}$ (con $d > 0$) appartenente al piano verticale x-y sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = m(0, -g)$ e di una forza elastica $\mathbf{F}_e = -k(x, y)$ di costante elastica k e centro coincidente con l'origine.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(x, \dot{x})$.
2. Si ricavi la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.
3. Si identifichi una grandezza conservata, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
4. Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
5. Si ricavi l'equazione delle curve di livello del sistema e se ne disegni il grafico nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ al variare della grandezza conservata di cui sopra. Si discuta qualitativamente la natura del moto.

Soluzione:

1 - La posizione della particella è data da

$$\mathbf{x} = (x, de^{-x^2/(2d^2)})$$

quindi la sua velocità è

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\dot{x}, -\dot{x}\frac{x}{d}e^{-x^2/(2d^2)}\right)$$

e l'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right).$$

La sua energia potenziale è

$$U = mgy + \frac{1}{2}k|\mathbf{x}|^2 = mgde^{-x^2/(2d^2)} + \frac{1}{2}k(x^2 + d^2e^{-x^2/d^2})$$

quindi la Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right) - mgde^{-x^2/(2d^2)} - \frac{1}{2}k(x^2 + d^2e^{-x^2/d^2}).$$

2 - L'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente è

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\left(1+\frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right)\right) = mg\frac{x}{d}e^{-x^2/(2d^2)} - kx\left(1-e^{-x^2/d^2}\right) + m\dot{x}^2\frac{x}{d^2}e^{-x^2/d^2}\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)$$

quindi

$$m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right) = mg\frac{x}{d}e^{-x^2/(2d^2)} - kx\left(1-e^{-x^2/d^2}\right) - m\dot{x}^2\frac{x}{d^2}e^{-x^2/d^2}\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right).$$

3 - Definiamo l'energia

$$E := \dot{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \mathcal{L} = K + U$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right) + mgde^{-x^2/(2d^2)} + \frac{1}{2}k(x^2 + d^2e^{-x^2/d^2})$$

e verifichiamo che $\dot{E} = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \dot{x}m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right) + m\dot{x}^3\frac{x}{d^2}e^{-x^2/d^2}\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)\\ &\quad -\dot{x}mg\frac{x}{d}e^{-x^2/(2d^2)} + \dot{x}kx\left(1-e^{-x^2/d^2}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione di Eulero-Lagrange.

4-1 - Come evidente dall'equazione di Eulero-Lagrange, i punti di equilibrio (i.e., le soluzioni dell'equazione di E-L della forma $x(t) \equiv x_0$) corrispondono ai punti critici di $U(x)$. Abbiamo

$$U'(x) = -mg\frac{x}{d}e^{-x^2/(2d^2)} + kx(1-e^{-x^2/d^2})$$

quindi se definiamo $X := e^{-x^2/(2d^2)}$ e $\alpha := mg/(2kd)$, allora $U'(x) = 0$ se e solo se

$$x(1 - X^2 - 2\alpha X) = 0$$

le cui soluzioni sono $x_0 = 0$ e le radici di

$$X^2 + 2\alpha X - 1 = 0$$

ovvero

$$X = \pm\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha.$$

Dato che $X = e^{-x^2/(2d^2)} \in (0, 1]$, l'unica radice accettabile è

$$X = e^{-x^2/(2d^2)} = \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha \quad \Rightarrow \quad x_\pm = \pm d\sqrt{-2\log(\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha)}.$$

4-2 - Studiamo adesso la stabilità di x_0 e $x_\pm$. Dato che $K(x, \dot{x})$ è una forma quadratica in $\dot{x}$ definita positiva uniformemente in x, i massimi relativi (isolati e non degeneri) di $U(x)$ sono punti di equilibrio instabile, mentre i minimi relativi (isolati e non degeneri) sono di equilibrio stabile. Abbiamo

$$U''(x_0) = -\frac{mg}{d} < 0$$

quindi x_0 è instabile. Inoltre

$$U''(x_\pm) = 2k\frac{x_\pm^2}{d^2}\left(\alpha e^{-x_\pm^2/(2d^2)} + e^{-x_\pm^2/d^2}\right) > 0$$

quindi $x_\pm$ sono stabili.

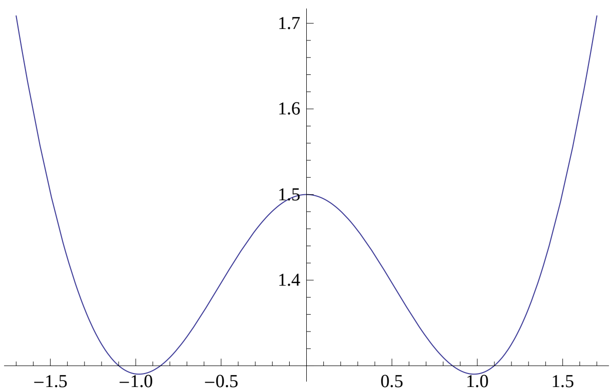
5 - Ricordiamo l'espressione dell'energia

$$E = \mathit{costante} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2}\right) + U(x)$$

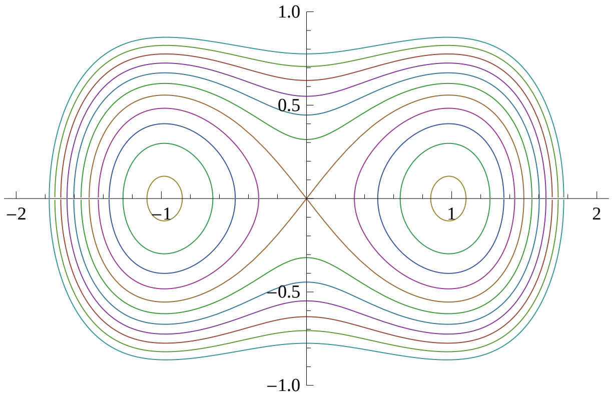
quindi l'equazione delle curve di livello è

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m(1 + \frac{x^2}{d^2}e^{-x^2/d^2})}}.$$

Il grafico di U ha la forma seguente:



quindi le curve di livello hanno la forma seguente:



- Se $E < U(0)$, allora il moto è periodico, e consiste in oscillazioni o attorno a x_+ o attorno a x_-.
- Se $E = U(0)$, allora $x \to x_0$ per $t \to \pm\infty$.
- Se $E > U(0)$, allora il moto è periodico, e consiste in oscillazioni centrate nell'origine.

2. (11 punti). Una massa puntiforme m si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto di una forza centrale

$$\mathbf{F} = -k \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|(|\mathbf{x}| + \ell)^3} ,$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $k, \ell > 0$. Si supponga di assegnare un dato iniziale corrispondente ad un momento angolare $\mathbf{L}$ non nullo.

1. Si identifichi il potenziale efficace per il moto radiale e se ne disegni il grafico, al variare di $L := |\mathbf{L}| > 0$.
2. Si disegnino le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ e si discuta qualitativamente la natura del moto sia radiale che complessivo, al variare di $L > 0$.
3. Si determinino tutti i possibili dati iniziali per cui il moto complessivo risultante è periodico e se ne calcoli il periodo nella forma di un integrale definito.

Soluzione:

1 - Il potenziale associato a $\mathbf{F}$ è

$$U(|\mathbf{x}|) = -\frac{k}{2(|\mathbf{x}| + \ell)^2}$$

quindi il potenziale efficace per il moto radiale è

$$V_{eff}(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = -\frac{k}{2(\rho + \ell)^2} + \frac{L^2}{2m\rho^2}.$$

I punti critici di V_{eff} sono le soluzioni (positive, poiché $\rho > 0$) di

$$\frac{(mk)^{1/3}}{\bar{\rho} + \ell} = \frac{L^{2/3}}{\bar{\rho}}$$

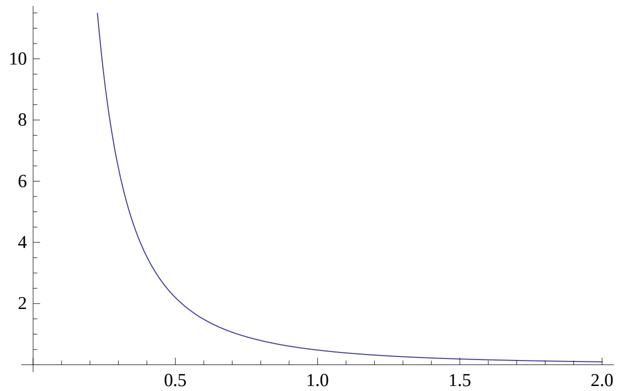
quindi

$$\bar{\rho} = \frac{\ell}{(\frac{mk}{L^2})^{1/3} - 1}$$

che è punto critico se e solo se $L^2 < mk$ (nel qual caso la soluzione è positiva, come desiderato). Inoltre,

$$V_{eff}(\rho) \underset{\rho \to 0}{\to} +\infty, \quad V_{eff}(\rho) \underset{\rho \to \infty}{\to} 0$$

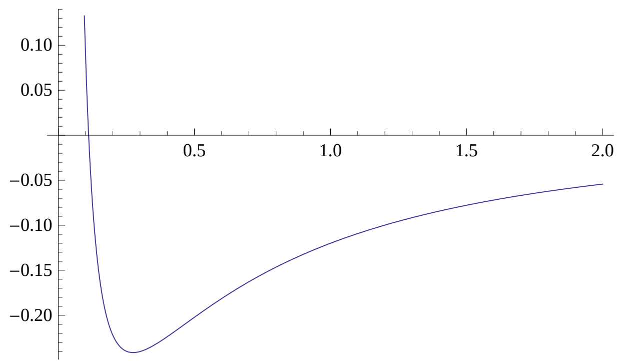
quindi se $L^2 \geqslant mk$, allora il grafico di V_{eff} è



Inoltre se $L^2 < mk$ allora

$$V_{eff}(\bar{\rho}) = \frac{L^2}{2m\bar{\rho}^2} \left(1 - \left(\frac{km}{L^2} \right)^{1/3} \right) < 0$$

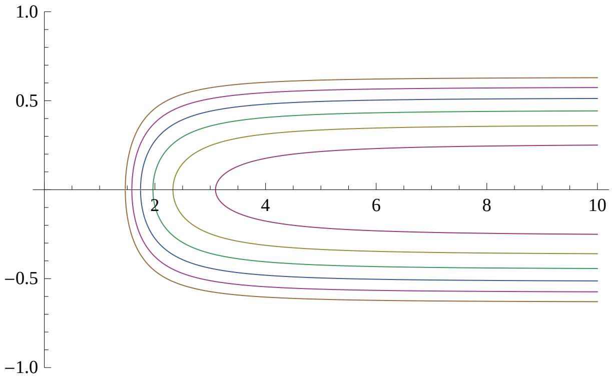
quindi il grafico fi V_{eff} è



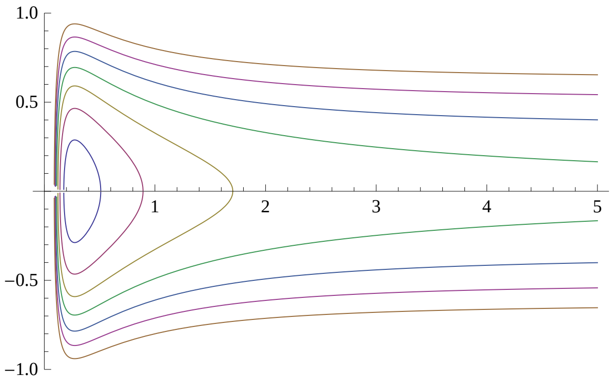
2 - Dal grafico di V_{eff} si deduce la forma delle curve di livello usando

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff})}$$

Se $L^2 \geqslant mk$,



Se $L^2 < mk$,



- Se $L^2 \geqslant mk$, allora tutti i moti sono aperti.
- Se $L^2 < mk$, tutti i moti con $E \geqslant 0$ sono aperti.
- Se $L^2 < mk$, allora i moti radiali con $E < 0$ sono periodici; il moto complessivo corrispondente può essere periodico o quasi-periodico, a seconda del rapporto tra i periodi del moto radiale e angolare (cf la discussione al punto seguente).

3 - Se $L^2 < mk$ e $E < 0$, allora il moto radiale è periodico. Il suo periodo è

$$T_\rho := 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}$$

dove ρ_- e ρ_+ sono le soluzioni di $V_{eff}(\rho_\pm) = E$. L'incremento della variabile angolo θ in un periodo T_ρ è

$$\Delta\theta = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \, \frac{L}{m\rho^2\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}.$$

Il moto complessivo è periodico se e solo se

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

e in questo caso, il periodo del moto complessivo è

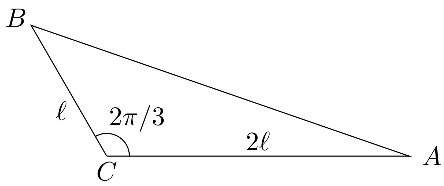
$$T_c = qT_\rho.$$

Se $\Delta\theta/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$, allora il moto complessivo è quasi-periodico.

3. (6 punti). Un corpo rigido è costituito da 3 masse puntiformi m disposte ai vertici di un triangolo ABC. Siano: ℓ la lunghezza del lato BC, 2ℓ la lunghezza del lato AC e $2\pi/3$ l'ampiezza dell'angolo al vertice C.

1. Si determini il centro di massa del sistema.
2. Si calcoli la matrice del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

Soluzione:



1 - Consideriamo un sistema di riferimento centrato in C, tale che il piano $x-y$ coincide con il piano del triangolo. Con riferimento alla figura, scegliamo l'asse x orizzontale e orientato verso destra, e l'asse y verticale e orientato verso l'alto. In tale sistema di riferimento le coordinate dei tre punti sono:

$$\mathbf{x}_A = (2\ell, 0, 0)\ , \qquad \mathbf{x}_B = (-\ell/2, \sqrt{3}\,\ell/2, 0)\ , \qquad \mathbf{x}_C = (0,0,0)\ .$$

Le coordinate del centro di massa sono quindi:

$$\mathbf{x}_{CM} = \ell(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0)$$

2 - Se trasliamo rigidamente il sistema di riferimento in modo tale da far coincidere la nuova origine con il centro di massa, le nuove coordinate dei tre vertici del triangolo sono:

$$\mathbf{x}'_A = \ell(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0)\ , \qquad \mathbf{x}'_B = \ell(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)\ , \qquad \mathbf{x}'_C = \ell(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0)\ .$$

In queste coordinate la matrice d'inerzia del sistema è

$$I = m\ell^2 \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

Gli autovalori di $I/(m\ell^2)$ sono

$$\lambda_0 = 4, \quad \lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{3}.$$

L'autovettore associato a λ_0 è $\xi_0 := (0,0,1)$, quello a λ_+ è

$$\xi_+ := \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(1, 2+\sqrt{3}, 0)$$

e quello a λ_- è

$$\xi_- := \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}(1, -2+\sqrt{3}, 0).$$

Quindi gli assi principali di inerzia sono ξ_0, ξ_+ e ξ_-, e i momenti d'inerzia corrispondenti sono $m\ell^2\lambda_0$, $m\ell^2\lambda_+$ e $m\ell^2\lambda_-$.