

Prova pre-esonero (10-1-2014)

1. Una massa puntiforme m di carica q si muove su una guida liscia di equazione $y = ae^{x/d}$ appartenente al piano verticale $x-y$ sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = m(0, -g)$ e della forza elettrica $\mathbf{F}_e = q(E_0, 0)$ dove $\mathbf{E}_0 = (E_0, 0)$ è un campo elettrico costante.
 - (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane le variabili (x, \dot{x}) .
 - (b) Si ricavi la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.
 - (c) Si identifichi una grandezza conservata, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
 - (d) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
 - (e) Si disegnino le curve di livello del sistema nel piano delle fasi (x, \dot{x}) e si discuta qualitativamente la natura del moto.
2. Una massa puntiforme m si muove in \mathbb{R}^3 sotto l'effetto di una forza centrale $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-6}$, dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $k > 0$.
 - (a) Si determinino gli integrali primi del sistema.
 - (b) Si identifichi il potenziale efficace per il moto radiale e se ne disegni il grafico.
 - (c) Si disegnino le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ e si discuta qualitativamente la natura del moto sia radiale che complessivo.
 - (d) Si esibisca un dato iniziale in corrispondenza del quale il moto complessivo risultante è periodico, e se ne calcoli il periodo.
3. Un corpo rigido è costituito da 5 masse puntiformi m disposte ai vertici di una piramide retta a base rettangolare. Siano a, b i lati della base e h l'altezza. Si calcoli la matrice d'inerzia della molecola rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.