Prova pre-esonero (10-1-2014)

1. Una massa puntiforme m di carica q si muove su una guida liscia di equazione $y = ae^{x/d}$ appartenente al piano verticale x-y sotto l'effetto della forza peso $\mathbf{F}_p = m(0, -g)$ e della forza elettrica $\mathbf{F}_e = q(E_0, 0)$ dove $\mathbf{E}_0 = (E_0, 0)$ è un campo elettrico costante. Si suppongano le costanti a, d, q, E_0 tutte positive.

   (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(x, \dot{x})$.

   (b) Si ricavi la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange.

   (c) Si identifichi una grandezza conservata, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

   (d) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

   (e) Si disegnino le curve di livello del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$ e si discuta qualitativamente la natura del moto.

Soluzione. La massa m si muove su un vincolo ideale di equazione parametrica $\boldsymbol{\gamma}(x) = (x, ae^{x/d})$. L'energia cinetica del punto in termini di $(x, \dot{x})$ è (usando il fatto che $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(x) = \dot{x}\big(1, (a/d)e^{x/d}\big)$)

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + (a/d)^2 e^{2x/d})$$

Inoltre la forza cui è soggetta la particella è conservativa con potenziale $U(\mathbf{x}) = mgy - qE_0 x$. Quindi la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + (a/d)^2 e^{2x/d}) - mgae^{x/d} + qE_0 x$$

L'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente è

$$\frac{d}{dt}\Big(m\dot{x}(1 + (a/d)^2 e^{2x/d})\Big) = m\dot{x}^2(a^2/d^3)e^{2x/d} - (mga/d)e^{x/d} + qE_0$$

o, equivalentemente,

$$m\ddot{x}(1 + (a/d)^2 e^{2x/d}) = -m\dot{x}^2(a^2/d^3)e^{2x/d} - (mga/d)e^{x/d} + qE_0 \ .$$

Una grandezza conservata del sistema è l'energia meccanica $E = \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\mathcal{L}(x, \dot{x}) - \mathcal{L}(x, \dot{x})$, che ha la forma:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + (a/d)^2 e^{2x/d}) + mgae^{x/d} - qE_0 x \ .$$

Verifichiamo esplicitamente il fatto che E è conservata:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= m\dot{x}\ddot{x}(1+(a/d)^2e^{2x/d}) + m\dot{x}^3(a^2/d^3)e^{2x/d} + (mga/d)\dot{x}e^{x/d} - qE_0\dot{x} = \\ &= \dot{x}\Big[m\ddot{x}(1+(a/d)^2e^{2x/d} + m\dot{x}^2(a^2/d^3)e^{2x/d} + (mga/d)e^{x/d} - qE_0\Big] = 0\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione di Eulero-Lagrange.

I punti di equilibrio per l'equazione di E-L sono tali che $\ddot{x} = \dot{x} = 0$, i.e,, soddisfano l'equazione

$$(mga/d)e^{x/d} = qE_0 \Rightarrow x = d\log\frac{qE_0d}{mga}$$

Quindi esiste un unico punto di equilibrio $x = x_0 = d\log\frac{qE_0d}{mga}$. Tale punto è un punto di minimo proprio non degenere per il potenziale $V(x) := mgae^{x/d} - qE_0x$ (infatti $V'(x_0) = 0$ e $V''(x_0) = e^{x_0/d}mga/d^2 = qE_0/d > 0$). Quindi per il teorema di Dirichlet (valido anche in questo caso, in cui l'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva in $\dot{x}$, uniformemente in x) x_0 è stabile. Il grafico del potenziale $V(x)$ è in figura 1.

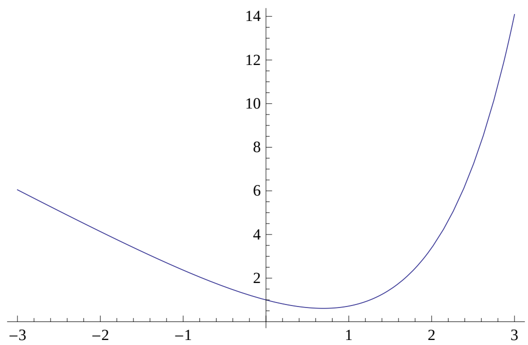

Figura 1: Grafico del potenziale $V(x) := mgae^{x/d} - qE_0x$

Le curve di livello hanno equazione

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\frac{E-V(x)}{1+(a/d)^2e^{2x/d}}}$$

con $E \geq V(x_0)$. I grafici delle curve di livello sono in figura 2.

Come evidente dal grafico, i moti sono tutti chiusi e periodici, di periodo

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+}\sqrt{\frac{m}{2}\frac{1+(a/d)^2e^{2x/d}}{E-V(x)}}dx$$

dove $x_\pm$ sono le due radici di $V(x) = E$.

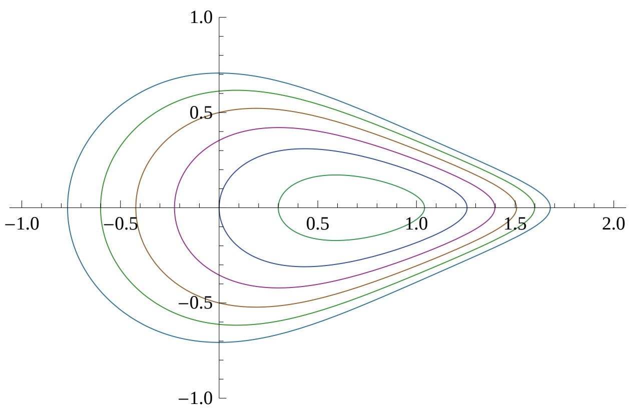

Figura 2: Curve di livello del problema 1.

2. Una massa puntiforme m si muove in $\mathbb{R}^3$ sotto l'effetto di una forza centrale $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-6}$, dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $k > 0$.

   (a) Si determinino gli integrali primi del sistema.

   (b) Si identifichi il potenziale efficace per il moto radiale e se ne disegni il grafico.

   (c) Si disegnino le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ e si discuta qualitativamente la natura del moto sia radiale che complessivo.

   (d) Si esibisca un dato iniziale in corrispondenza del quale il moto complessivo risultante è periodico, e se ne calcoli il periodo.

Soluzione. Gli integrali primi del moto sono: l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + V(|\mathbf{x}|)$$

dove $V(\rho) = -k/(4\rho^4)$ è l'energia potenziale associata alla forza centrale assegnata; e il momento angolare

$$\mathbf{L} = m\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}} \, .$$

Ora, se $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ il moto si svolge su una retta (quella definita dai dati iniziali $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$, tra loro paralleli); su tale retta il moto è quello di un sistema meccanico 1D con energia potenziale $V(\rho)$. In questo caso $V(\rho)$ è una funzione strettamente crescente su $(0, +\infty)$, che tende a $-\infty$ per $\rho \to 0^+$ e a 0 per $\rho \to \infty$, vedi figura 3.

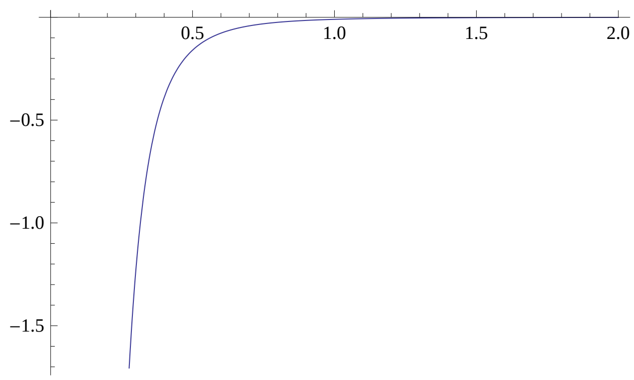

Figura 3: Grafico del potenziale $V(\rho) = -k/(4\rho^4)$

È facile vedere che tutte le orbite sono aperte e ai bordi del dominio di definizione temporale l'orbita tende o a scappare all'infinito o a cadere sul centro della forza. Il grafico delle curve di livello è in figura 4.

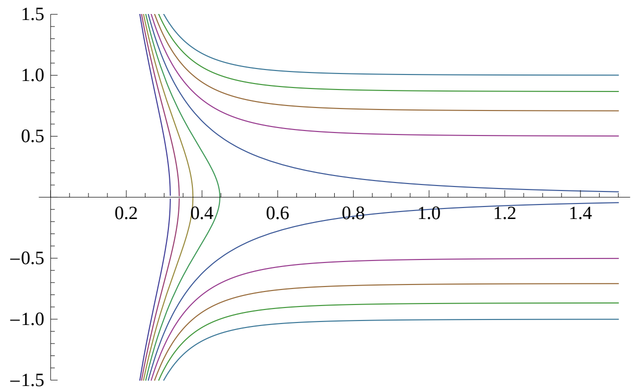

Figura 4: Curve di livello associate al potenziale $V(\rho) = -k/(4\rho^4)$

Consideriamo ora il caso in cui $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$. Come discusso in generale a lezione, la conservazione di $\mathbf{L}$ implica che il moto si svolge sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$ stesso. Chiamando ρ e θ le coordinate polari su tale piano, sappiamo che il moto della variabile radiale $\rho(t)$ è quello di un sistema meccanico 1D con energia potenziale

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L}{2m\rho^2} - \frac{k}{4\rho^4}$$

mentre quello della variabile θ si può ottenere integrando la legge di conservazione $\dot{\theta} = L/(m\rho^2)$.

I grafici di V_{eff} e delle corrispondenti curve di livello sono riportati in figura 5 e 6.

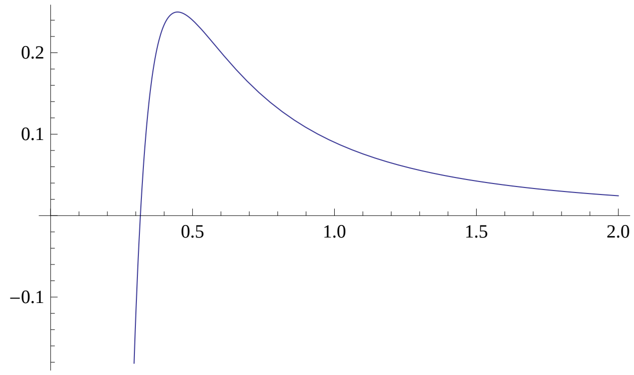

Figura 5: Grafico del potenziale $V_{eff}(\rho) = L/(2m\rho^2) - k/(4\rho^4)$

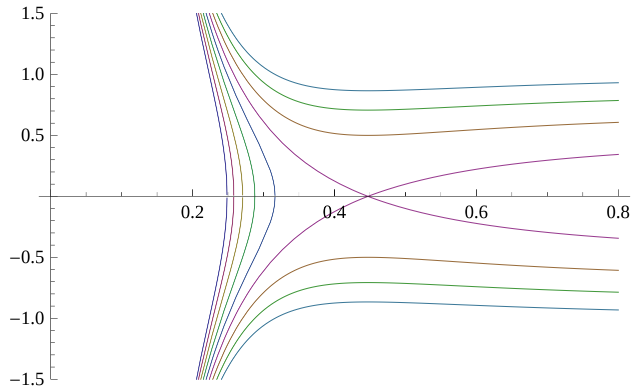

Figura 6: Curve di livello associate al potenziale $V_{eff}(\rho) = L/(2m\rho^2) - k/(4\rho^4)$

Il moto radiale ammette un unico punto di equilibrio (instabile) $\rho_0 = \sqrt{km}/L$, in corrispondenza del quale il moto radiale è banale, $\rho(t) \equiv \rho_0$, e il moto complessivo è circolare uniforme (quindi in particolare periodico) con periodo $T = 2\pi/\omega$, e $\omega = \dot{\theta} = L/(m\rho_0^2)$. Tutti gli altri moti sono aperti, sia per quanto riguarda il moto radiale che complessivo. Anche in questo caso ai bordi del dominio di definizione temporale l'orbita tende o a scappare all'infinito o a cadere sul centro della forza.

3. Un corpo rigido è costituito da 5 masse puntiformi m disposte ai vertici di una piramide retta a base rettangolare. Siano a, b i lati della base e h l'altezza. Si calcoli la matrice d'inerzia della molecola rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

Soluzione. Ricordiamo che una piramide retta ha la proprietà di avere la proiezione del vertice sulla base coincidente con il centro della base stessa. In un sistema di riferimento centrato nel centro della base, asse z orientato come l'asse della piramide, e assi x, y orientati parallelamente ai lati di base, le coordinate dei 5 punti sono:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1 = (a/2, b/2, 0) \ , \quad \mathbf{x}_2 = (a/2, -b/2, 0) \ , \\ &\mathbf{x}_3 = (-a/2, -b/2, 0) \ , \quad \mathbf{x}_4 = (-a/2, b/2, 0) \ , \\ &\mathbf{x}_5 = (0, 0, h) \end{aligned}$$

Per ragioni di simmetria, il centro di massa del sistema si trova lungo il segmento congiungente il vertice con il centro della base, e la sua coordinata lungo l'asse z è per definizione $z_{CM} = \frac{1}{5}(0, 0, h)$. Quindi le coordinate dei 5 punti in un sistema centrato nel centro di massa e con gli assi orientati nello stesso modo descritto sopra, sono:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}'_1 = (a/2, b/2, -h/5) \ , \quad \mathbf{x}'_2 = (a/2, -b/2, -h/5) \ , \\ &\mathbf{x}'_3 = (-a/2, -b/2, -h/5) \ , \quad \mathbf{x}'_4 = (-a/2, b/2, -h/5) \ , \\ &\mathbf{x}'_5 = (0, 0, 4h/5) \end{aligned}$$

Dato che l'asse della piramide è un asse di simmetria di ordine 2 esso coincide necessariamente con uno degli assi principali di inerzia del corpo: questo vuol dire che la matrice di inerzia attorno al centro di massa nel sistema di riferimento appena descritto è sicuramente diagonale a blocchi (i due blocchi corrispondono rispettivamente al blocco 2×2 relativo alle coordinate x, y, e il blocco 1×1 relativo alla variabile z). L'unico elemento non diagonale della matrice di inerzia che a priori potrebbe essere non nullo è l'elemento $I_{12} = -m \sum_i x'_i y'_i$ che però si verifica facilmente essere nullo, rimpiazzando i valori espliciti delle coordinate dei punti $\mathbf{x}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$. In conclusione, la matrice di inerzia è automaticamente diagonale nella base scelta, cosicché gli assi principali di inerzia coincidono con gli assi x, y, z scelti sopra. I valori dei momenti principali di inerzia sono:

$$\begin{aligned} I_1 &= m \sum_i \left[(y'_i)^2 + (z'_i)^2\right] = m(b^2 + \frac{4}{5}h^2) \ , \\ I_2 &= m \sum_i \left[(x'_i)^2 + (z'_i)^2\right] = m(a^2 + \frac{4}{5}h^2) \ , \\ I_3 &= m \sum_i \left[(x'_i)^2 + (y'_i)^2\right] = m(a^2 + b^2) \ . \end{aligned}$$