Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Secondo appello scritto [7-2-2014]

1. **(10 punti).** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + (1+\alpha)y + 1 \\ \dot{y} = \alpha x + 2y \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Si discuta per quali valori di α il sistema ammette punti di equilibrio. Per tali valori di α:

i. si identifichino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;

ii. si scriva la soluzione generale del sistema.

(b) Si scelga a proprio piacimento un valore di α per cui il sistema non ammette punti di equilibrio e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.

2. **(7 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = \frac{4\pi x}{(1+x^2)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right)$$

(a) Si determini una costante del moto.

(b) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.

(c) Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

(d) Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.

(e) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.

(f) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se le soluzioni corrispondenti sono globali o no.

3. **(4 punti).** Un corpo rigido è costituito da 4 masse puntiformi m disposte ai vertici di una piramide retta a base triangolare, la cui base è un triangolo equilatero di lato ℓ e la cui altezza è pari a 2ℓ.

(a) Si determini il centro di massa del sistema.

(b) Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

4. **(9 punti).** Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un paraboloide di equazione cartesiana $z = (x^2 + y^2)/\ell$, dove ℓ è una costante positiva.

   (a) Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate ρ, θ tali che $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$.

   (b) Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta})$. Si riconosca che θ è una variabile ciclica.

   (c) Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, che chiameremo A, associato alla variabile ciclica θ.

   (d) Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\theta}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = (m/2)\dot{\rho}^2 F(\rho) + V_{eff}(\rho)$, dove $F(\rho) > 0$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

   (e) Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

   (f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.