Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/14

FM210 - Fisica Matematica I

Secondo appello scritto [7-2-2014]

1. **(10 punti).** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + (1+\alpha)y + 1 \\ \dot{y} = \alpha x + 2y \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si discuta per quali valori di α il sistema ammette punti di equilibrio. Per tali valori di α:
   (a) si identifichino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità;
   (b) si scriva la soluzione generale del sistema.
2. Si scelga a proprio piacimento un valore di α per cui il sistema non ammette punti di equilibrio e si scriva la soluzione generale del problema corrispondente.

Soluzione: Definiamo $\mathbf{x} := (x, y)$,

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1+\alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e riscriviamo il sistema lineare come

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

1 - Il determinante di A è

$$\det(A) = 6 - \alpha(1+\alpha) = -(\alpha - 2)(\alpha + 3)$$

quindi se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$, allora il sistema ammette un punto di equilibrio della forma $\mathbf{x}_0 = -A^{-1}\mathbf{b}$. Se invece $\alpha = 2$, allora

$$A\mathbf{x} = (3x + 3y, 2x + 2y)$$

che è diverso da $(-1, 0)$ per qualsiasi scelta di (x, y): quindi per $\alpha = 2$ il sistema non ammette punti di equilibrio. Analogamente, se $\alpha = -3$, allora

$$A\mathbf{x} = (3x - 2y, -3x + 2y)$$

che è diverso da $(-1, 0)$ per qualsiasi scelta di (x, y): quindi neanche per $\alpha = -3$ il sistema ammette punti di equilibrio. In conclusione il sistema ammette un punto di equilibrio se e solo se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$.

1.a - Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$, il punto di equilibrio è

$$\mathbf{x}_0 = -A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+3)} \begin{pmatrix} 2 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_+ = 3 + \alpha, \quad \lambda_- = 2 - \alpha$$

ed è facile verificare che $\max\{\lambda_+, \lambda_-\} > 0$, qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$ (anzi, piú precisamente $\max\{\lambda_+, \lambda_-\} \geq 5/2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$): quindi il punto di equilibrio è instabile.

1.b - Gli autovettori associati a $\lambda_+ = 3 + \alpha$, $\lambda_- = 2 - \alpha$ sono

$$\mathbf{v}_+ = \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

che sono indipendenti per $\alpha \neq -1/2$ (nel qual caso i due autovalori sono coincidenti e uguali a $5/2$). Quindi, per $\alpha \neq -3, 2, 5/2$, la soluzione generale del sistema è

$$\mathbf{x}(t) = ae^{(3+\alpha)t} \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + be^{(2-\alpha)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+3)} \begin{pmatrix} 2 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Se invece $\alpha = 5/2$ allora la matrice A, pur essendo invertibile, non è diagonalizzabile. L'unico autovettore può essere scelto come $\mathbf{v} = (1, -1)$, e l'autovettore generalizzato $\mathbf{u}$, tale che $(A - (5/2)\mathbb{1})\mathbf{u} = \mathbf{v}$, può essere scelto come $\mathbf{u} = (1, 1)$. Mettiamoci nella base $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, definendo $z_1(t)$ e $z_2(t)$ come le coordinate di $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ nella nuova base:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + z_1(t)\mathbf{v} + z_2(t)\mathbf{u}$$

Il sistema lineare assegnato, scritto in termini di $z_{1,2}$, assuma la forma diagonale a blocchi di Jordan:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{5}{2} z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{5}{2} z_2 \end{cases}$$

la cui soluzione è (risolvendo prima la seconda equazione, e poi sostituendo nella prima):

$$\begin{cases} z_1(t) = e^{5t/2}(a + bt) \\ z_2(t) = be^{5t/2} \end{cases}$$

dove a e b sono due parametri reali. In conclusione, se $\alpha = 5/2$, la soluzione cercata è

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8/25 \\ -2/25 \end{pmatrix} + e^{5t/2}(a + bt) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{5/2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e dove abbiamo usato che $\mathbf{x}_0\big|_{\alpha=5/2} = (-8/25, -2/25)$.

2 - Se $\alpha = -3$, allora il sistema si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 1 \\ \dot{y} = -3x + 2y \end{cases}$$

quindi
$$\dot{x} + \dot{y} = 1$$
quindi
$$x + y = t + a$$
con a una costante arbitraria. Inoltre, sostituendo tale soluzione nell'equazione per y, troviamo:
$$\dot{y} = 5y - 3(t + a)$$
quindi
$$y(t) = be^{5t} + \frac{3}{5}t + \frac{3}{5}a + \frac{3}{25}$$
e
$$x(t) = -be^{5t} + \frac{2}{5}t + \frac{2}{5}a - \frac{3}{25}.$$
Se $\alpha = 2$, allora il sistema si scrive
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 3y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$
quindi
$$2\dot{x} - 3\dot{y} = 2$$
quindi
$$2x - 3y = 2t + a$$
e
$$\dot{y} = 5y + 2t + a$$
quindi
$$y(t) = be^{5t} - \frac{2}{5}t - \frac{1}{5}a - \frac{2}{25}$$
e
$$x(t) = \frac{3}{2}be^{5t} + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}a - \frac{3}{25}.$$

2. **(7 punti).** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale su $\mathbb{R}$
$$\ddot{x} = \frac{4\pi x}{(1 + x^2)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{1 + x^2}\right)$$

1. Si determini una costante del moto.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità.
4. Si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi.
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, e se ne scriva il periodo nella forma di un integrale definito.
6. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti aperti, e si discuta se le soluzioni corrispondenti sono globali o no.

Soluzione:

1 - È facile verificare che, ponendo

$$U(x) := \sin\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right)$$

si ha che

$$\ddot{x} = -U'(x).$$

Quindi l'energia

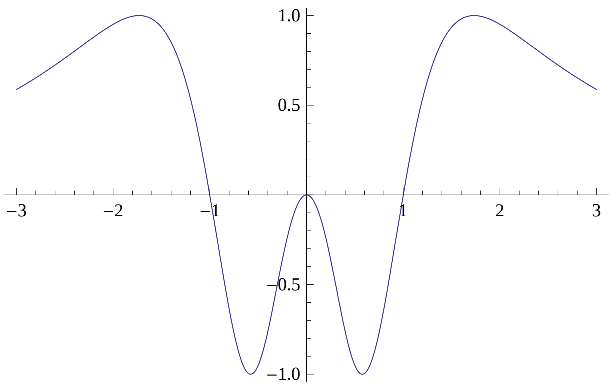
$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

è una costante del moto.

2 - Notiamo che $U(-x) = U(x)$, quindi è sufficiente studiare $U(x)$ per $x \geqslant 0$:

$$U'(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right) < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{1+x^2} < \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} < x < \sqrt{3}.$$

Inoltre $U(0) = 0$, $U(1/\sqrt{3}) = -1$, $U(\sqrt{3}) = 1$, $\lim_{x\to\infty} U(x) = 0$ quindi il grafico di U è

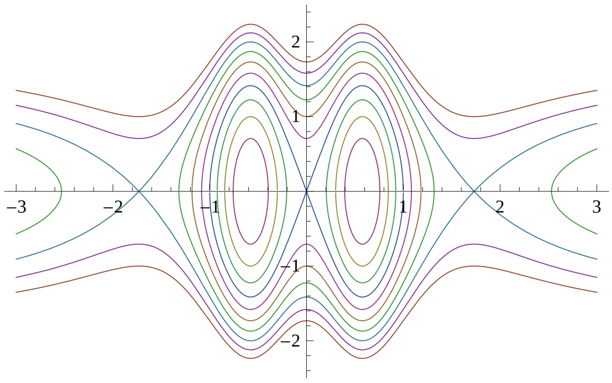


3 - I punti di equilibrio sono i punti critici di U, quindi sono

$$\bar{x}_0 := 0, \quad \bar{x}_{1,\pm} := \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \bar{x}_{2,\pm} := \pm\sqrt{3}.$$

I minimi di U sono stabili e i massimi instabili, quindi $\bar{x}_{1,\pm} = \pm 1/\sqrt{3}$ sono stabili e $\bar{x}_0 = 0$ e $\bar{x}_{2,\pm} = \pm\sqrt{3}$ sono instabili.

4 - Le traiettorie nel piano delle fasi si deducono dal grafico di U:



5 - Il moto è periodico e non banale se e solo se $-1 < E < 0$, oppure $0 < E < 1$ e $|x(0)| < \sqrt{3}$ (i moti corrispondenti ai punti di equilibrio possono essere considerati come moti periodici "banali). Se $-1 < E < 0$ allora chiamiamo $\pm x_-$ e $\pm x_+$ le quattro soluzioni di $U(x) = E$, con $0 < x_- < x_+$; in questo caso il periodo del moto è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} dx\ \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

Se $0 < E < 1$ allora chiamiamo $\pm x_i$ le due soluzioni di $U(x) = E$ tali che $0 < x_i < \sqrt{3}$. Il periodo del moto è

$$T = 2\int_{-x_i}^{x_i} dx\ \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

6 - Il moto è aperto se e solo se $\{0 < E \leq 1$ e $|x(0)| > \sqrt{3}\}$ o se $\{E > 1\}$. In entrambi casi, il moto tende a $\pm\infty$ nel limite di $t \to \infty$. Il moto esiste globalmente, poiché il potenziale è limitato dal basso.

3. **(4 punti).** Un corpo rigido è costituito da 4 masse puntiformi m disposte ai vertici di una piramide retta a base triangolare, la cui base è un triangolo equilatero di lato ℓ e la cui altezza è pari a 2ℓ.

1. Si determini il centro di massa del sistema.
2. Si calcoli la matrice d'inerzia del corpo rispetto al suo centro di massa, si identifichino gli assi principali di inerzia e si calcolino i momenti di inerzia corrispondenti.

Soluzione: Chiamiamo A, B e C i tre punti della base e D il vertice della piramide.

1 - Scegliamo un sistema di riferimento tale che il piano $x - y$ coincide con il piano della base, l'asse x è paralelo a uno dei lati della base, l'origine è centrata nel centro del triangolo di base e il vertice della piramide si trova sull'asse z positivo. In tale sistema le coordinate dei 4 punti sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_A &= \ell(0, \sqrt{3}/3, 0) \\
\mathbf{x}_B &= \ell(1/2, -\sqrt{3}/6, 0) \\
\mathbf{x}_C &= \ell(-1/2, -\sqrt{3}/6, 0) \\
\mathbf{x}_D &= \ell(0, 0, 2)
\end{aligned}$$

cosicché le coordinate del centro di massa sono

$$\mathbf{x}_G = \ell(0, 0, 1/2) \ .$$

Se trasliamo rigidamente il sistema di riferimento in modo da ricentrare l'origine in G, troviamo che le coordinate dei 4 punti della piramide nel nuovo sistema di riferimento sono:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'_A &= \ell(0, \sqrt{3}/3, -1/2) \\
\mathbf{x}'_B &= \ell(1/2, -\sqrt{3}/6, -1/2) \\
\mathbf{x}'_C &= \ell(-1/2, -\sqrt{3}/6, -1/2) \\
\mathbf{x}'_D &= \ell(0, 0, 3/2) \ .
\end{aligned}$$

2 - La matrice d'inerzia del sistema è

$$I = m\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi i momenti d inerzia sono $(7/2)m\ell^2$, $(7/2)m\ell^2$ e $m\ell^2$, e gli assi principali d'inerzia corrispondenti sono $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$.

4. **(9 punti).** Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un paraboloide di equazione cartesiana $z = (x^2 + y^2)/\ell$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate ρ, θ tali che $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$.
2. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta})$. Si riconosca che θ è una variabile ciclica.
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, che chiameremo A, associato alla variabile ciclica θ.
4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\theta}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = (m/2)\dot{\rho}^2 F(\rho) + V_{eff}(\rho)$, dove $F(\rho) > 0$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Soluzione:

1 - Usando $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, troviamo che il paraboloide è parametrizzato da

$$\mathbf{x} := (x, y, z) = \left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \frac{\rho^2}{\ell}\right)$$

2 - La velocità del punto sulla superficie ha la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta, \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta, 2\dot\rho\frac{\rho}{\ell}\right)$$

quindi l'energia cinetica si scrive

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2(1 + 4\rho^2/\ell^2) + \rho^2\dot\theta^2\right)$$

inoltre l'energia potenziale è

$$U = mgz = mg\frac{\rho^2}{\ell}$$

quindi la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(\rho, \theta; \dot\rho, \dot\theta) = K - U = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2(1 + 4\rho^2/\ell^2) + \rho^2\dot\theta^2\right) - mg\frac{\rho^2}{\ell}.$$

La Lagrangiana non dipende da θ quindi θ è una variabile ciclica.

3 - Le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono

$$\begin{cases} m\ddot\rho\left(1 + 4\dfrac{\rho^2}{\ell^2}\right) = m\rho\dot\theta^2 - 4m\dot\rho^2\dfrac{\rho}{\ell^2} - 2mg\dfrac{\rho}{\ell} \\ \dfrac{d}{dt}(m\rho^2\dot\theta) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che

$$A := m\rho^2\dot\theta$$

è una grandezza conservata.

4 - L'energia è

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}) + \rho^2\dot\theta^2\right) + mg\frac{\rho^2}{\ell}$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}m\dot\rho^2\left(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}\right) + \frac{A^2}{2m\rho^2} + mg\frac{\rho^2}{\ell} \equiv \frac{1}{2}m\dot\rho^2F(\rho) + V_{eff}(\rho)$$

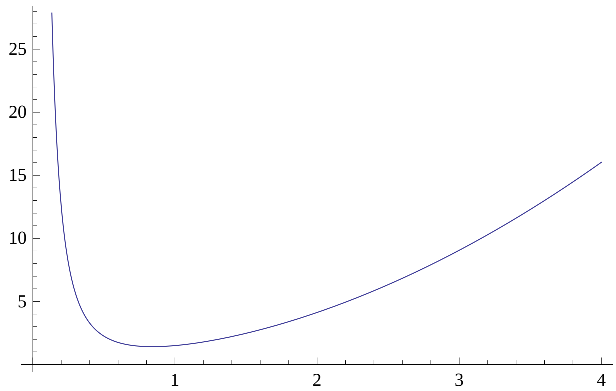
con $F(\rho) := 1 = 4\rho^2/\ell^2$ e

$$V_{eff}(\rho) = mg\frac{\rho^2}{\ell} + \frac{A^2}{2m\rho^2}.$$

5 - Abbiamo

$$V'_{eff}(\rho) > 0 \Longleftrightarrow \rho^4 > \frac{A^2\ell}{2m^2 g}$$

e $\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = +\infty$, $\lim_{\rho\to\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$ quindi il grafico di V_{eff} è dalla forma



Il moto radiale ammette un punto di equilibrio stabile, $\rho_0 := (A^2\ell/(2m^2 g))^{1/4}$. Per ogni $E > V_{eff}(\rho_0)$ il moto è periodico e non banale.

6 - Se $E = V_{eff}(\rho_0)$ allora il moto complessivo è circolare uniforme, di periodo

$$T = 2\pi m\rho_0^2/A$$

Se invece $E > V_{eff}(\rho_0)$, siano ρ_- e ρ_+ le due soluzioni di $V_{eff}(\rho) = E$; il periodo del moto radiale è

$$T_\rho = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho\,\sqrt{\frac{m(1+4\frac{\rho^2}{\ell^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}}.$$

L'incremento di θ su un intervallo di tempo di durata T_ρ è

$$\Delta\theta = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho\,\frac{A}{m\rho^2}\sqrt{\frac{m(1+4\frac{\rho^2}{\ell^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}}.$$

Il moto complessivo è periodico se e solo se

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

In questo caso, se $\Delta\theta = 2\pi(p/q)$, allora il periodo del moto complessivo è qT_ρ.