Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 10 (13-12-2012)

ESERCIZIO 1. Un'autobus si muove lungo il percorso rettilineo da A a B con accelerazione costante $a > 0$, partendo al tempo $t = 0$ da fermo dal punto A. Scelto un sistema di riferimento fisso κ con asse y lungo la direttrice AB, asse z lungo la verticale (così che $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$) e asse x scelto conseguentemente, si scelga un sistema di riferimento mobile K solidale all'autobus e si calcolino:

1. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da κ a K.

Durante il tragitto da A a B un passeggero all'interno dell'autobus lancia una pallina di massa m verso l'alto (nel suo sistema di riferimento).

2. Si scrivano le equazioni del moto della pallina nel sistema di riferimento K.
3. Si risolvano tali equazioni in corrispondenza del dato iniziale assegnato.
4. Si dica a che distanza dal punto di lancio ricade la pallina.

Soluzione:

1 - Se chiamiamo $\mathbf{q}$ una posizione relativa a κ e $\mathbf{Q}$ la posizione corrispondente relativa a K, allora

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{r}(t)$$

dove $\mathbf{r}(t) = (0, \frac{1}{2}at^2, 0)$ è la posizione dell'autobus relativa a κ quindi

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2}(0, at^2, 0).$$

La velocità corrispondente è

$$\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{q}} - (at, 0).$$

2 - La pallina è sottomessa alla forza gravitazionale e alle forze inerziali quindi

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = -mg\mathbf{e}_z + (F_{ir} + F_{co} + F_{ce} + F_t)$$

dove F_{ir} è la forza inerziale di rotazione, F_{co} è la forza di Coriolis, F_{ce} è la forza centrifuga e F_t è la forza inerziale di trascinamento. Dato che non c'è nessuna rotazione, $F_{ir} = F_{co} = F_{ce} = 0$ quindi

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = -mg\mathbf{e}_z - ma\mathbf{e}_x.$$

3 - Scriviamo $\mathbf{Q} := (X, Y, Z)$ e scegliamo un dato iniziale $\mathbf{Q}(0) = (0, 0, h)$, $\dot{\mathbf{Q}}(0) = (0, 0, v_0)$. Le equazioni del moto sono:

$$\ddot{X} = 0, \quad \ddot{Y} = -a, \quad \ddot{Z} = -g$$

e quindi

$$X(t) = 0, \quad Y(t) = -\frac{1}{2}at^2, \quad Z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\ .$$

4 - La pallina ricade quando $Z(t_1) = 0$, con $t_1 > 0$, i.e., all'istante

$$t_1 = \frac{1}{g}\big(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\big)$$

Quindi quando la pallina tocca terra, la distanza orizzontale tra la sua posizione e il punto di lancio è

$$|Y(t_1)| = \frac{a}{g^2}\Big(v_0^2 + gh + v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}\Big).$$

<u>Esercizio 2.</u> Un sasso viene lasciato cadere in un pozzo profondo $h = 100$m alla nostra latitudine $\lambda = 42^o$. Qual è la sua deviazione dalla verticale dovuta alla forza di Coriolis indotta dalla rotazione della Terra attorno al suo asse? Per risolvere il problema si proceda nel modo seguente: si fissi un sistema di riferimento solidale con il pozzo, nello stesso modo fatto in classe per il pendolo di Foucault. Dopo aver trascurato la forza inerziale di trascinamento e la forza centrifuga (si discuta perché numericamente tali forze sono trascurabili rispetto alle altre) si riconosca che le equazioni del moto possono scriversi nella forma:

$$\ddot{\mathbf{Q}} = -g\hat{\eta}_3 - 2(-\omega\cos\lambda\hat{\eta}_1 + \omega\sin\lambda\hat{\eta}_3) \wedge \dot{\mathbf{Q}}$$

che vanno risolte in corrispondenza del dato iniziale $\mathbf{Q}(0) = 0$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = 0$. Se t^* è l'istante di tempo a cui $Q_3(t^*) = -h$, allora $\sqrt{|Q_1(t^*)|^2 + |Q_2(t^*)|^2}$ rappresenta la deviazione dalla verticale cercata.

Soluzione: La definizione di $\hat{\eta}_i$ è la stessa che per il pendolo di Foucault, e il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha la stessa espressione:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\theta\hat{\eta}_3 - \omega\sin\theta\hat{\eta}_1$$

dove $\omega = 2\pi/(3600 * 24)$ rad/s$=7.3 * 10^{-5}$ rad/s e $\theta := \pi/2 - \lambda$. Quindi chiamando Ω_i le coordinate del vettore di rotazione sulla base $\hat{\eta}_i$, abbiamo

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega\cos\lambda\\ 0\\ \omega\sin\lambda\end{pmatrix}.$$

In particolare, $\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$.

1 - L'equazione del moto è

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = -mg\hat{\eta}_3 + (F_{ir} + F_{co} + F_{ce} + F_t)$$

dove

$$\begin{cases} F_{ir} = -m\dot{\mathbf{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} = 0\\ F_{co} = -2m\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}\\ F_{ce} = -m\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{Q})\\ F_t = -mB^{-1}\ddot{\mathbf{r}} = -m\mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{R}_0)\end{cases}$$

dove $\mathbf{R}_0 = (0, 0, R_0)$, e $R_0 \simeq 6.4 * 10^6$ m è il raggio della Terra. Si noti che

$$F_t = costante = m\omega^2 R_0\cos\lambda\begin{pmatrix}\sin\lambda\\ 0\\ \cos\lambda\end{pmatrix} =: m\mathbf{g}_{in}\ ,$$

con $|\mathbf{g}_{in}| = m\omega^2 R_0 \cos\lambda \approx 3.4 \cdot 10^{-2}$ m $\cdot$ s^{-2} $\ll g \approx 9.8$ m/s^2. L'effetto della forza di trascinamento si può quindi riassorbire nella definizione dell'accelerazione di gravità, il cui valore effettivo è quindi

$$\tilde{\mathbf{g}} := \begin{pmatrix} m\omega^2 R_0 \sin\lambda\cos\lambda \\ 0 \\ -g + m\omega^2 R_0 \cos^2\lambda \end{pmatrix}$$

D'altra parte, dato che $|\mathbf{g}_{in}| = m\omega^2 R_0 \cos\lambda \ll g$, possiamo trascurare nei calcoli numerici $\mathbf{g}_{in}$ rispetto a $\mathbf{g}$, cosa che faremo di qua in seguito.

Inoltre $|\mathbf{Q}| \approx h = 10^2$ m, $|\dot{\mathbf{Q}}| \approx \sqrt{gh} \approx 30$ m$\cdot$s^{-1}, quindi

$$\frac{1}{m}|F_{co}| \approx 2\omega\cos\lambda|\dot{\mathbf{Q}}| \approx 2 \cdot (7.3 \cdot 10^{-5}) \cdot (0.74) \cdot 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\frac{1}{m}|F_{ce}| \approx \omega^2\cos\lambda|\mathbf{Q}| \approx (7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (0.74) \cdot 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Quindi possiamo trascurare la forza centrifuga rispetto alla forza di Coriolis. Con tali approssimazioni le equazioni del moto diventano:

$$\ddot{\mathbf{Q}} = -g\hat{\eta}_3 - 2\mathbf{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} = -g\hat{\eta}_3 - 2(-\omega\cos\lambda\hat{\eta}_1 + \omega\sin\lambda\hat{\eta}_3) \wedge \dot{\mathbf{Q}}.$$

2 - Scriviamo $\mathbf{Q} := X\hat{\eta}_1 + Y\hat{\eta}_2 + Z\hat{\eta}_3$, cosicché l'equazione del moto prende la forma

$$\ddot{X}\hat{\eta}_1 + \ddot{Y}\hat{\eta}_2 + \ddot{Z}\hat{\eta}_3 = -g\hat{\eta}_3 + 2\omega(\sin\lambda\dot{Y}\hat{\eta}_1 - (\cos\lambda\dot{Z} + \sin\lambda\dot{X})\hat{\eta}_2 + \cos\lambda\dot{Y}\hat{\eta}_3)$$

o, equivalentemente,

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} = 2\omega \begin{pmatrix} 0 & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & -\cos\lambda \\ 0 & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \equiv 2\omega A\dot{\mathbf{Q}} - g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da risolversi in corrispondenza del dato iniziale con posizione e velocità nulle. La matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & -\cos\lambda \\ 0 & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

ha tre autovalori distinti, $\mu = 0, +i, -i$, ed è quindi diagonalizzabile, con rispettivi autovettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 0 \\ -\sin\lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ +i \\ \cos\lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -i \\ \cos\lambda \end{pmatrix}.$$

Se sviluppiamo $\mathbf{Q}$ sulla base degli autovettori, $\mathbf{Q} = Q'_1\mathbf{v}_1 + Q'_2\mathbf{v}_2 + Q'_3\mathbf{v}_3$, troviamo:

$$\ddot{\mathbf{Q}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega i & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega i \end{pmatrix} \dot{\mathbf{Q}}' - g\begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda/2 \\ \cos\lambda/2 \end{pmatrix}$$

che una volta integrata con dati iniziali nulli ci dà:

$$\begin{cases} Q'_1(t) = \frac{1}{2}g\sin\lambda t^2 \\ Q'_2(t) = \frac{g}{2}\cos\lambda\left(\frac{e^{2\omega it}-1}{4\omega^2} + \frac{t}{2\omega i}\right) \\ Q'_3(t) = \frac{g}{2}\cos\lambda\left(\frac{e^{-2\omega it}-1}{4\omega^2} - \frac{t}{2\omega i}\right) \end{cases}$$

e tornando alle coordinate $\mathbf{Q} = (X, Y, Z)$ la soluzione ha la forma:

$$\mathbf{Q} = \frac{g}{4\omega^2} \begin{pmatrix} \cos\lambda \sin\lambda\big[2\omega^2 t^2 + \cos(2\omega t) - 1\big] \\ \cos\lambda\big[2\omega t - \sin(2\omega t)\big] \\ -\sin^2\lambda \cdot 2\omega^2 t^2 - \cos^2\lambda\big[1 - \cos(2\omega t)\big] \end{pmatrix}.$$

3 - Il tempo di caduta è circa quello che otterremmo trascurando la forza di Coriolis, i.e., $t^* \simeq \sqrt{2h/g} \simeq 4.5$ s, il che garantisce che $\omega t \lesssim 7.3 \cdot 10^{-5} \cdot 4.5 \approx 3.3 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Se quindi sviluppiamo la soluzione in serie di Taylor rispetto a $\omega t \ll 1$, troviamo:

$$\mathbf{Q} = gt^2 \begin{pmatrix} O((\omega t)^2) \\ \cos\lambda \frac{1}{3}\omega t + O((\omega t)^3) \\ -\frac{1}{2} + O((\omega t)^2) \end{pmatrix}$$

quindi

$$t^* = \sqrt{2\frac{h}{g}(1 + O(h\omega^2 g^{-1}))}$$

dove $h\omega^2/g \approx 5 \cdot 10^{-8}$, cosicché $t^* = 4.5$ s. Sostituendo tale valore del tempo di caduto nelle formule per X e Y troviamo che $X(t^*) = h \cdot O(h\omega^2 g^{-1})$ è dell'ordine di qualche μm, mentre

$$Y(t^*) = \frac{1}{3} g\omega \cos\lambda \left(2\frac{h}{g}\right)^{3/2} (1 + O(h\omega^2 g^{-1}))$$

che coincide quindi con la deviazione dalla verticale, la cui direzione è verso est. Numericamente, per $\lambda = 42°$, tale deviazione è di 1.6 cm.

<u>Esercizio 3.</u> Al luna park, Luigi decide di salire sul galeone dei pirati, una giostra che oscilla nel modo seguente: il galeone è sospeso a un braccio meccanico di lunghezza R, contenuto nel piano verticale xz, che vincola il galeone a muoversi sulla circonferenza verticale di raggio R e centro nel fulcro del braccio. Se θ è l'angolo formato dal braccio con la verticale, la legge oraria del moto angolare è $\theta(t) = \theta_0 \sin(\kappa t)$, con $0 < \theta_0 < \pi$ e $\kappa > 0$. Dopo aver scelto un sistema di riferimento fisso κ e uno in moto K solidale a Luigi mentre si trova sulla giostra (durante la corsa Luigi rimane legato e fermo su un sedile del galeone), si scrivano:

i. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da κ a K;

ii. la forza totale, per componenti, a cui è soggetto Luigi (si assuma che Luigi sia soggetto, oltre che alle forze fittizie dovute al moto di K rispetto a κ, anche alla forza peso). Qual è l'intensità di tale forza al variare del tempo?

Soluzione: Definiamo la base ortonormale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ dove $\hat{e}_3$ è verticale verso l'alto, $\hat{e}_2$ è contenuto nel piano in cui si muove il galeone, verso destra. Scegliamo un sistema di riferimento fisso con origine nel fulcro della giostra, e un sistema di riferimento mobile tale che: (i) l'origine O$'$ coincide con Luigi; (ii) $\hat{\eta}_1 \equiv \hat{e}_1$, $\hat{\eta}_3$ orientato da O' al fulcro della giostra (i.e., in direzione radiale entrante rispetto al moto circolare della giostra), e $\hat{\eta}_2$ di conseguenza.

1 - Chiamiamo $\mathbf{q}$ il vettore posizione relative a κ e $\mathbf{Q}$ quello relativo a K. Abbiamo

$$\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}$$

dove

$$\mathbf{r}(t) := R \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta(t) \\ -\cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ 0 & \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

Il vettore di rotazione corrispondente è $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = (\dot{\theta}, 0, 0)$. La legge di trasformazione delle velocità è quindi

$$\dot{\mathbf{q}} = B(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}) + \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ 0 & \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 - \dot{\theta}Q_3 \\ \dot{Q}_3 + \dot{\theta}Q_2 \end{pmatrix} + R\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

2 - Usando il fatto che la posizione di Luigi nel sistema di riferimento mobile è $\mathbf{Q} \equiv 0$, abbiamo che Luigi è soggetto alla forza

$$\mathbf{F} := -mgB^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - mB^{-1}\ddot{\mathbf{r}}$$

Inoltre

$$B^{-1}\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\ddot{\theta} \\ R\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{R} := B^{-1}\mathbf{r} = -R(0, 0, 1)$; e

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg\sin\theta - mR\ddot{\theta} \\ -mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$|\mathbf{F}| = m\sqrt{(g\sin(\theta(t)) + R\ddot{\theta}(t))^2 + (g\cos(\theta(t)) + R\dot{\theta}^2(t))^2}$$

in cui si può inserire

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\kappa t).$$