Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 11 (20-12-2012)

ESERCIZIO 1. Si calcolino i momenti principali di inerzia dei seguenti corpi rigidi rispetto al loro centro di massa:

1. Asta rigida sottile omogenea di lunghezza ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = 0$].
2. Disco sottile omogeneo di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
3. Lamina quadrata sottile omogenea di lato ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$].
4. Cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
5. Sfera omogenea di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2$].

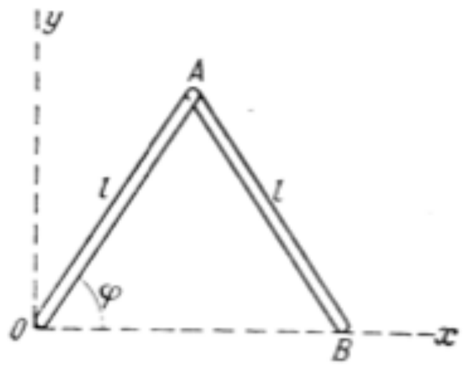
ESERCIZIO 2. Si dimostri il seguente teorema (Huygens-Steiner): Sia dato un corpo rigido con centro di massa G e distribuzione di massa $\{\mathbf{q_i}, m_i\}$. Assegnate due rette parallele r_0 ed r_1 in direzione $\hat{\xi}$ e passanti la prima per G e la seconda per un punto P, vale la seguente identità:

$$I(r_1) = I(r_0) + Md^2$$

dove $I(r_i) = \sum_i m_i \mathrm{dist}^2(\mathbf{q_i}, r_i)$ è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto alla retta r_i, e d è la distanza tra r_0 ed r_1.

ESERCIZIO 3. Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h rotola senza attrito e senza strisciare su un piano orizzontale, in modo tale che il suo centro di massa G ha coordinate $(x(t), 0, R)$ ad ogni istante di tempo. Il centro di massa G è collegato da una molla di costante elastica k e centro $(0, 0, R)$. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando x come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.

ESERCIZIO 4. Due asticelle sottili OA, eAB, omogenee di lunghezza ℓ e massa M, sono incernierate come in figura, in modo tale che abbiano un vertice comune A, il punto O sia fisso e il punto B si trovi sull'asse orizzontale x. Il sistema è soggetto alla forza peso. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando φ come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.



Esercizio 5. Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.