Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 11 (20-12-2012)

ESERCIZIO 1. Si calcolino i momenti principali di inerzia dei seguenti corpi rigidi rispetto al loro centro di massa:

1. Asta rigida sottile omogenea di lunghezza ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = 0$].

2. Disco sottile omogeneo di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].

3. Lamina quadrata sottile omogenea di lato ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$].

4. Cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].

5. Sfera omogenea di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2$].

Soluzione.

1. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel punto medio dell'asta e asse $\hat{e}_3$ orientato come l'asta stessa, cosicché la regione di spazio occupata dal corpo rigido è $A = \{(0,0,z) : -\ell/2 \leq z \leq \ell/2\}$. Per ragioni di simmetria, in tale sistema di riferimento la matrice di inerzia è diagonale, con $I_3 = 0$ e

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz z^2 = \frac{M}{\ell}\frac{2}{3}\Big(\frac{\ell}{2}\Big)^3 = \frac{1}{12}M\ell^2 .$$

2. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro geometrico del disco e asse $\hat{e}_3$ ortogonale al disco stesso, cosicché la regione di spazio occupata dal corpo rigido è $D = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Per ragioni di simmetria, in tale sistema di riferimento la matrice di inerzia è diagonale, con

$$I_3 = \frac{M}{\pi R^2}\int_D dx\,dy\,(x^2+y^2) = \frac{M}{\pi R^2}2\pi\int_0^R dr\,r^3 = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

e

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{\pi R^2}\int_D dx\,dy\,x^2 = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr\,r\int_0^{2\pi} d\theta(r\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}MR^2 .$$

3. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro geometrico della lamina e asse $\hat{e}_3$ ortogonale alla lamina stessa, cosicché la regione di spazio occupata dal corpo rigido è $Q = \{(x,y,0) : -\ell/2 \leq x \leq \ell/2\,,\ -\ell/2 \leq y \leq \ell/2\}$. Per ragioni di simmetria, in tale sistema di riferimento la matrice di inerzia è diagonale, con

$$I_3 = \frac{M}{\ell^2}\int_Q dx\,dy\,(x^2+y^2) = \frac{M}{\ell^2}2\ell\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx\,x^2 = \frac{4M}{\ell}\frac{1}{3}\Big(\frac{\ell}{2}\Big)^3 = \frac{1}{6}M\ell^2$$

e

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{\ell^2}\int_Q dx\,dy\,x^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 .$$

4. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro geometrico del cilindro e asse $\hat{e}_3$ parallelo all'asse di simmetria rotazionale del cilindro stesso, cosicché la regione di spazio occupata dal corpo rigido è $C = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le R^2\,,\ -h/2 \le z \le h/2\}$. Per ragioni di simmetria, in tale sistema di riferimento la matrice di inerzia è diagonale, con

$$I_3 = \frac{M}{\pi R^2 h}\int_C dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \frac{M}{\pi R^2 h}2\pi h\int_0^R dr\,r^3 = \frac{1}{2}MR^2$$

e

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{M}{\pi R^2 h}\int_C dx\,dy\,dz\,(x^2+z^2) = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{M}{h}\int_{-h/2}^{h/2} dz\,z^2 = \\ &= \frac{1}{4}MR^2 + \frac{2M}{h}\frac{1}{3}\Big(\frac{h}{2}\Big)^3 = \frac{1}{12}M(3R^2+h^2)\,. \end{aligned}$$

5. Fissiamo un sistema di riferimento con origine nel centro geometrico della sfera, cosicché la regione di spazio occupata dal corpo rigido è $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Per ragioni di simmetria, in tale sistema di riferimento la matrice di inerzia è diagonale, con

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 = I_3 &= \frac{M}{4\pi R^3/3}\int_S dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \\ &= \frac{3M}{4\pi R^3}\int_0^R dr\,r^2\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,r^2\sin^2\theta = \\ &= \frac{3M}{4\pi R^3}\frac{R^5}{5}\frac{4}{3}2\pi = \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

<u>Esercizio 2.</u> Si dimostri il seguente teorema (Huygens-Steiner): Sia dato un corpo rigido con centro di massa G e distribuzione di massa $\{\mathbf{q_i}, m_i\}$. Assegnate due rette parallele r_0 ed r_1 in direzione $\hat{\xi}$ e passanti la prima per G e la seconda per un punto P, vale la seguente identità:

$$I(r_1) = I(r_0) + Md^2$$

dove $I(r_i) = \sum_i m_i \mathrm{dist}^2(\mathbf{q_i}, r_i)$ è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto alla retta r_i, e d è la distanza tra r_0 ed r_1.

Soluzione. Vedi il libro di Gentile, Capitolo 10, paragrafo 42.26.

<u>Esercizio 3.</u> Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h rotola senza attrito e senza strisciare su un piano orizzontale, in modo tale che il suo centro di massa G ha coordinate $(x(t), 0, R)$ ad ogni istante di tempo. Il centro di massa G è collegato da una molla di costante elastica k e centro $(0,0,R)$. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando x come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.

Soluzione. Usando il teorema di König, possiamo scrivere l'energia cinetica del cilindro nella forma $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, dove $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse e $\omega = \dot{\theta}$ è la velocità angolare rispetto a questo stesso asse (qui θ è l'angolo di rotazione del cilindro attorno al suo asse). La condizione di rotolamento senza strisciamento è $\dot{x} = R\dot{\theta}$, cosicché

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\Big(\frac{\dot{x}}{R}\Big)^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$

La Lagrangiana del sistema è quindi

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

e l'equazione di E-L corrispondente è

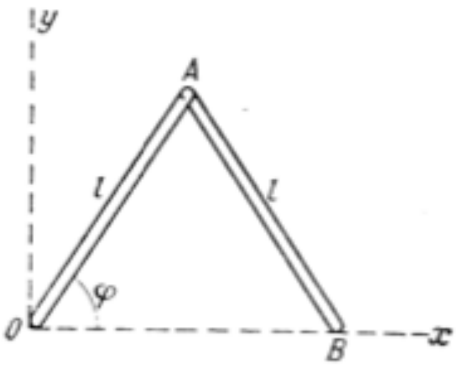
$$\frac{3}{2}M\ddot{x} = -kx$$

la cui soluzione generale è

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

con $\omega_0 = \sqrt{2k/(3M)}$

<u>ESERCIZIO 4.</u> Due asticelle sottili OA e AB, omogenee di lunghezza ℓ e massa M, sono incernierate come in figura, in modo tale che abbiano un vertice comune A, il punto O sia fisso e il punto B si trovi sull'asse orizzontale x. Il sistema è soggetto alla forza peso. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando φ come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.



Soluzione. Usando il teorema di König, possiamo scrivere l'enrgia cinetica del sistema nella forma

$$T = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_G^{(1)}|^2 + \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_G^{(2)}|^2 + 2\cdot\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

dove $\mathbf{r}_G^{(1)} = \frac{\ell}{2}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ è la coordinata del centro di massa dell'asta OA, $\mathbf{r}_G^{(2)} = \frac{\ell}{2}(3\cos\varphi, \sin\varphi)$ è la coordinata del centro di massa dell'asta AB, $|\dot{\varphi}|$ è il valore assoluto della velocità angolare sia dell'asta OA che dell'asta AB, e $I = \frac{1}{12}M\ell^2$ è il momento di inerzia di un'asta sottile omogenea di massa M e lunghezza ℓ rispetto a un asse passante per il suo centro di massa e ortogonale all'asta stessa. L'energia cinetica del sistema, scritta in termini dell'angolo φ e della sua derivata, ha quindi la forma:

$$T = \frac{M\ell^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{M\ell^2}{8}\dot{\varphi}^2(1 + 8\sin^2\varphi) + \frac{1}{12}M\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}M\ell^2\dot{\varphi}^2(1 + 3\sin^2\varphi)$$

e la Lagrangiana complessiva del sistema è

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{3}M\ell^2\dot{\varphi}^2(1 + 3\sin^2\varphi) - Mg\ell\sin\varphi$$

L'equazione di E-L associata è

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{2}{3}M\ell^2\dot{\varphi}(1 + 3\sin^2\varphi)\Big) = 2M\ell^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - Mg\ell\cos\varphi$$

o, equivalentemente,

$$\frac{2}{3}\ddot{\varphi}(1 + 3\sin^2\varphi) = -2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{g}{\ell}\cos\varphi\ .$$

Un integrale primo del moto è l'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{3} M\ell^2 \dot\varphi^2 (1 + 3\sin^2\varphi) + Mg\ell \sin\varphi$$

cosicché la soluzione del problema può essere determinata per quadrature:

$$\dot\varphi = \pm\sqrt{\frac{3(E' - \omega_0^2 \sin\varphi)}{1 + 3\sin^2\varphi}} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \sqrt{\frac{1 + 3\sin^2\varphi}{3(E' - \omega_0^2 \sin\varphi)}}\, d\varphi$$

dove $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ e $E' := E/(M\ell^2) \geq -\omega_0^2$ (nella seconda equazione $\varphi_0 := \varphi(t_0)$; inoltre il segno di fronte all'integrale va scelto uguale $+$ sulla porzione di curva di livello appartenente al semipiano superiore del piano delle fasi $(\varphi, \dot\varphi)$, e uguale a $-$ altrimenti).

Il grafico delle curve di livello $\dot\varphi = \pm\sqrt{\frac{3(E' - \omega_0^2 \sin\varphi)}{1+3\sin^2\varphi}}$ sul piano delle fasi $(\varphi, \dot\varphi)$ è riportato in Figura 1.

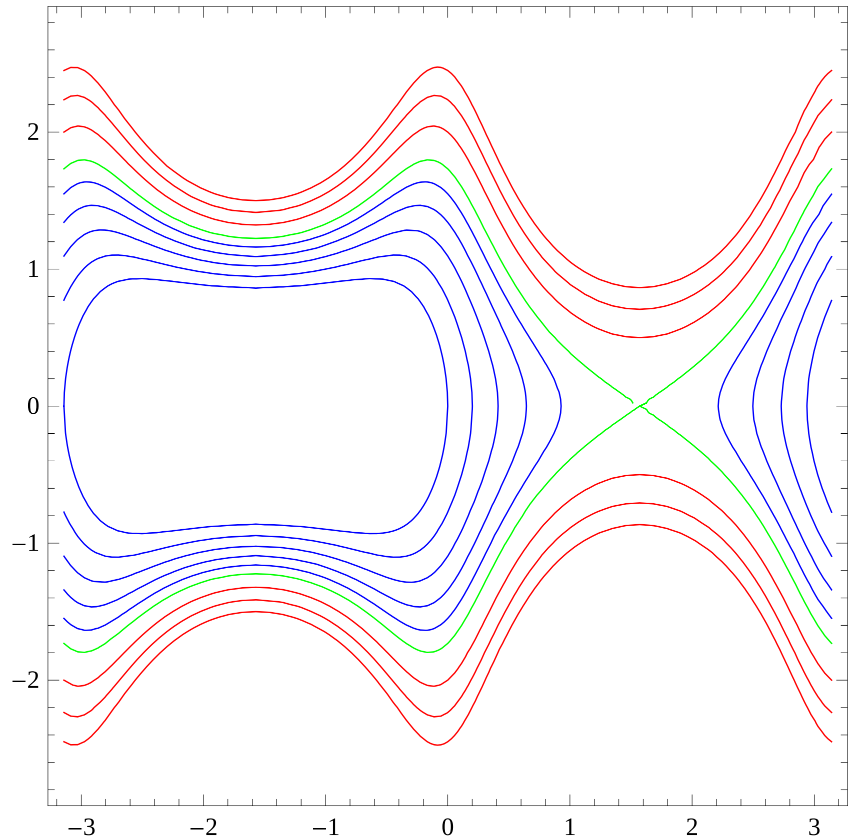


Figura 1: Figura 1. Curve di livello nel piano $(\varphi, \dot\varphi)$ corrispondenti alla soluzione del problema n^o 4. Le curve blu sono centrate sul punto di equilibrio stabile, e corrispondono a moti periodici di tipo oscillatorio ($-\omega_0^2 < E' < \omega_0^2$). La curva verde è la separatrice ($E' = \omega_0^2$). Le curve rosse corrispondono a oscillazioni complete verso destra o verso sinistra ($E' > \omega_0^2$).

Il sistema ammette due punti di equilibrio: $\varphi = -\pi/2$ (stabile) e $\varphi = +\pi/2$ (instabile). I moti a energia $-\omega_0^2 < E' < \omega_0^2$ sono oscillatori, di periodo

$$T = 2 \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \sqrt{\frac{1 + 3\sin^2\varphi}{3(E' - \omega_0^2 \sin\varphi)}}\, d\varphi$$

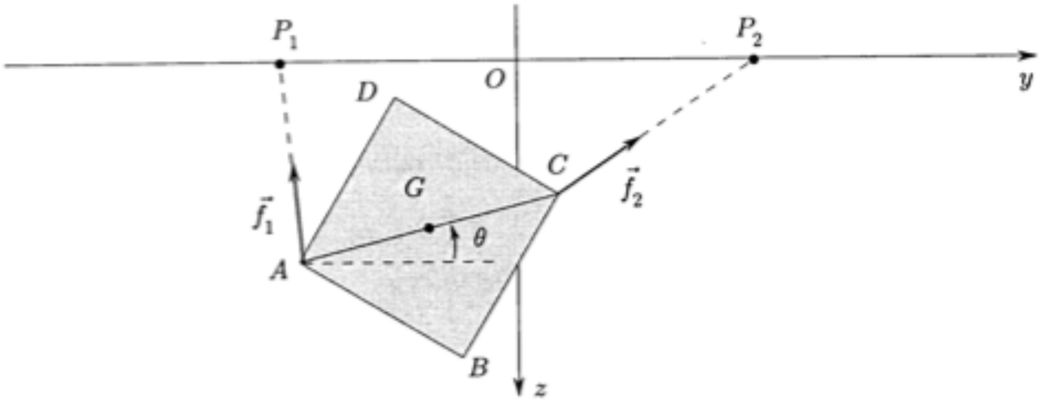
dove $\varphi_\pm$ sono le due radici di $E' = \omega_0^2 \sin\varphi$ (punti di inversione). I moti a energia $E' > \omega_0^2$ sono periodici e tali che $\dot\varphi$ è sempre positiva o sempre negativa (oscillazioni complete sempre in senso antiorario o sempre in senso orario); il loro periodo è

$$T' = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+3\sin^2\varphi}{3(E'-\omega_0^2\sin\varphi)}}\, d\varphi\ .$$

Infine, in corrispondenza dell'energia $E' = \omega_0^2$, abbiamo sia il moto banale $\varphi \equiv \pi/2$, sia due moti non banali (moti sulla separatrice) con $\dot\varphi > 0$ e $\dot\varphi < 0$, rispettivamente. Se ad es $\dot\varphi > 0$, il moto sulla separatrice prende la forma

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}\,\omega_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \sqrt{\frac{1+3\sin^2\varphi}{1-\sin\varphi}}\, d\varphi\ .$$

<u>Esercizio 5.</u> Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0,-d,0)$ e $P_2 = (0,d,0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.



Soluzione. Scegliamo un sistema di riferimento come in figura, ma con l'asse z orientato verso l'alto. Siano $\mathbf{r}_G = (0,y,z)$ le coordinate del baricentro della lamina. L'energia cinetica della lamina è (usando il teorema di König) $T = \frac{1}{2}M(\dot y^2+\dot z^2) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2$, dove $I = \frac{1}{6}M\ell^2$ è il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse passante per $\mathbf{r}_G$ e ortogonale alla lamina. Si noti inoltre che le coordinate del punto A sono $(0, y - \frac{\ell}{\sqrt2}\cos\theta, z - \frac{\ell}{\sqrt2}\sin\theta)$, mentre quelle del punto C sono $(0, y + \frac{\ell}{\sqrt2}\cos\theta, z + \frac{\ell}{\sqrt2}\sin\theta)$: di conseguenza, la distanza tra A e P_1 è $\sqrt{(y+d-\frac{\ell}{\sqrt2}\cos\theta)^2 + (z-\frac{\ell}{\sqrt2}\sin\theta)^2}$, mentre la distanza tra C e P_2 è $\sqrt{(y-d+\frac{\ell}{\sqrt2}\cos\theta)^2 + (z+\frac{\ell}{\sqrt2}\sin\theta)^2}$. La Lagrangiana complessiva del sistema è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y,z,\theta,\dot y,\dot z,\dot\theta) &= \frac{1}{2}M(\dot y^2+\dot z^2) + \frac{1}{12}M\ell^2\dot\theta^2 - Mgz - \frac{1}{2}k\Big[(y+d-\frac{\ell}{\sqrt2}\cos\theta)^2 + \\
&\quad +(y-d+\frac{\ell}{\sqrt2}\cos\theta)^2 + (z-\frac{\ell}{\sqrt2}\sin\theta)^2 + (z+\frac{\ell}{\sqrt2}\sin\theta)^2 = \\
&= \frac{1}{2}M(\dot y^2+\dot z^2) + \frac{1}{12}M\ell^2\dot\theta^2 - Mgz - k\Big[y^2+z^2+d^2+\frac{\ell^2}{2} - \sqrt2\, d\ell\cos\theta\Big]
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{y} = -2ky \\
&M\ddot{z} = -Mg - 2kz \\
&\frac{1}{6}M\ell^2\ddot{\theta} = -\sqrt{2}\,kd\ell\sin\theta \ .
\end{aligned}
$$

La soluzione generale per le variabili y e z ha la forma:

$$
y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \ , \qquad z(t) = -\frac{Mg}{2k} + C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) \ ,
$$

con $\omega_0 := \sqrt{2k/M}$. Inoltre, chiamando $\omega_1 := \sqrt{6\sqrt{2}kd/(M\ell)}$, l'equazione per la variabile θ prende la forma $\ddot{\theta} = -\omega_1^2\sin\theta$, che è l'equazione di un pendolo semplice, la cui soluzione per quadrature è stata discussa a lezione.