

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014
FM210 - Fisica Matematica 1
TUTORATO 2 (11-10-2013)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale per un punto materiale di massa $m = 1$, descritto dalle equazioni del moto

$$\ddot{x} = -U'(x),$$

con $U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ (potenziale a doppia buca).

- Si risolva esplicitamente il moto corrispondente al dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (\sqrt{2}, 0)$.
- Si denoti con T il periodo di un moto generico a energia negativa. Si calcoli il limite di T nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.

ESERCIZIO 2. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = x^2 - x$$

- Si determini una grandezza conservata del moto
- Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
- Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti e a moti chiusi aperiodici
- Si calcoli il periodo dei moti periodici nella forma di un integrale definito
- Si calcoli il limite di tale periodo nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.
- Si consideri un dato iniziale corrispondente a un moto aperto e si stabilisca se il tempo perché il punto raggiunga l'infinito è finito o no. Si stabilisca quindi se il moto esiste globalmente o no.
- Si risolva esplicitamente il moto sulla separatrice, per un dato iniziale scelto a piacere sulla curva critica.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = \frac{12}{x^{13}} - \frac{6}{x^7}$$

- Si determini una grandezza conservata del moto
- Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi
- Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti aperti
- Si calcoli il limite di tale periodo nel limite di piccole oscillazioni, i.e., nel limite in cui l'ampiezza delle oscillazioni tende a 0.
- Si risolva esplicitamente il moto con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$.

ESERCIZIO 4. Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla retta \mathbb{R} sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x + 2 \sin x.$$

Dopo aver scritto l'equazione del moto e aver determinato un integrale primo:

- si disegni il grafico dell'energia potenziale,
- si determinino i punti di equilibrio del sistema
- si disegnino le curve di livello nel piano (x, \dot{x})
- si identifichino i dati iniziali che producono: (i) moti non limitati, (ii) moti limitati. In quest'ultimo caso si discuta quando il moto è periodico o aperiodico.