

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014
FM210 - Fisica Matematica 1
TUTORATO 3 (18-10-2013)

ESERCIZIO 1. Si consideri il pendolo con attrito:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - \gamma \dot{\theta}.$$

Si dimostri che $\theta = \pi$ è instabile, anche nel caso in cui $\gamma > 0$.

ESERCIZIO 2. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = 2\alpha x(x^2 + 1)^{\alpha-1},$$

con $\alpha > 0$.

- Si determini una grandezza conservata del moto.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi e si scriva la soluzione per quadrature.
- Si stabilisca se, al variare di $\alpha > 0$, il moto esiste globalmente o no.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R} ,

$$\ddot{x} = -U'(x), \quad U(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- Si disegni il grafico di $U(x)$.
- Si disegnino le traiettorie del sistema nel piano delle fasi.
- Si dimostri che il punto di equilibrio $x = 0$ è stabile, pur non essendo un minimo isolato locale di U .

ESERCIZIO 4. Si consideri l'equazione sul cerchio:

$$\dot{\theta} = 1 - \cos \theta.$$

Si dimostri che $\theta = 0$ è un punto di equilibrio instabile ma attrattivo.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale di massa $m = 1$ su \mathbb{R}^2 ,

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} U(\mathbf{x}), \quad U(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}|^4.$$

Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. In particolare, si dimostri esplicitamente che $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è stabile, mentre gli altri punti di equilibrio sono instabili.