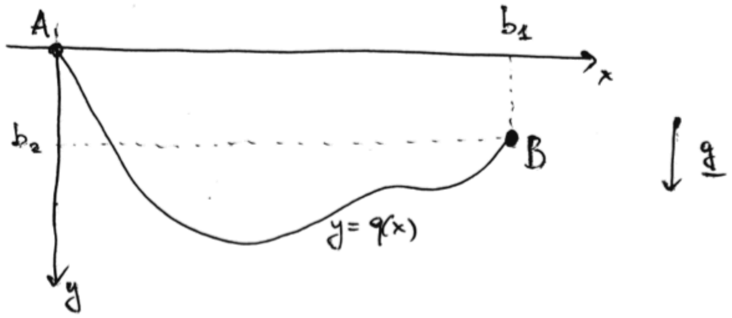
Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato 5 (8-11-2013)

Esercizio 1. Tra tutte le curve che passano per due punti A e B in un piano verticale (con B ad un'altezza minore o uguale di quella di A), determinare quella che gode della proprietà seguente: una particella inizialmente in quiete in A che si cade lungo di essa sotto l'influenza della gravità e in assenza di attrito impiega il tempo minimo per raggiungere B (tale curva si dice *brachistocrona*).

A tale scopo, una volta fissato un sistema di coordinate come in figura :



- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x))dx \,, \qquad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2}{2gq}}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui g è l'accelerazione di gravità, $y = q(x)$ rappresenta il profilo della curva, $A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q)$ ha il significato fisico di "tempo necessario a percorrere la curva $y = q(x)$ da A a B", e il puntino in $\dot{q}(x)$ rappresenta la derivata rispetto a x. [Suggerimento: si usi la conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{m}{2}v(x)^2 - mgq(x)$ per ricavare la velocità della particella nel punto $(x, q(x))$, e quindi il tempo di percorrenza.]

- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

- Mostrare che tale equazione è risolta da una *cicloide* con cuspide nel punto di partenza. [Suggerimento: si ricordi che l'equazione parametrica di una cicloide con cuspide nell'origine è

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

  da cui si vede che la sua equazione cartesiana ha la forma $y = r(1 - \cos\varphi(x/r))$ dove $\varphi = h^{-1}$ è la funzione inversa di $h(t) = t - \sin t$.]

Esercizio 2. Determinare la forma che assume una corda pesante di lunghezza ℓ, i cui estremi sono fissati nei punti A e B del piano verticale $x - y$ (tale forma definisce una curva chiamata *catenaria*). A tale scopo, si determini la curva passante in A e B che minimizza l'energia potenziale gravitazionale, tra tutte quelle a lunghezza fissata ℓ. Si fissi il sistema di coordinate come in figura e si proceda come segue.

- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x))dx \ , \qquad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := -(\lambda + g\rho q)\sqrt{1 + \dot{q}^2}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui g è l'accelerazione di gravità, ρ la densità lineare della corda, e λ una costante (moltiplicatore di Lagrange) che va fissata in modo tale che la lunghezza totale della curva $\int_0^{b_1} \sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}dx$ sia uguale ad ℓ. [Suggerimento: si osservi che l'energia potenziale gravitazionale di un elemento $d\ell$ di curva attorno a $(x, q(x))$ è $-\rho g\sqrt{1 + \dot{q}^2(x)}dx$.]

- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

- Mostrare che tale equazione è risolta da un coseno iperbolico di ampiezza opportuna.