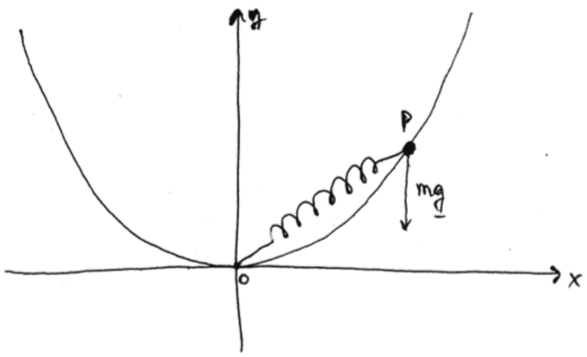
Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 6 (15-11-2013)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi in un piano verticale (x, y), lungo il profilo di equazione $y = x^2/\ell_0$. Il punto è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza di riposo nulla.



- Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate adattate al vincolo.
- Si derivino le equazioni del moto sul vincolo.
- Si identifichi una grandezza conservata.
- Si risolva il moto per quadrature.

Soluzione:

1 - La posizione della particella nel piano (x, y) è

$$\mathbf{x} = \left(x, \frac{x^2}{l_0}\right)$$

quindi la sua velocità è

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\dot{x}, 2\frac{x}{l_0}\dot{x}\right)$$

quindi l'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right)$$

e l'energia potenziale del sistema è

$$U = mg\frac{x^2}{l_0} + \frac{1}{2}kx^2\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right) .$$

Quindi la Lagrangiana è

$$L(x, \dot{x}) = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) - mg\frac{x^2}{l_0} - \frac{1}{2}kx^2\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right).$$

Se definiamo

$$\omega_0 := \sqrt{2\frac{g}{l_0}}, \quad \sqrt{\frac{k}{m}} := \omega_1$$

allora

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) - \frac{m}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2)x^2 - \frac{m}{2}\frac{\omega_1^2}{l_0^2}x^4.$$

2 - Le equazioni del moto sono date dall'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right)\right) = -m(\omega_0^2 + \omega_1^2)x - 2m\frac{\omega_1^2}{l_0^2}x^3 + 4m\dot{x}^2\frac{x}{l_0^2}$$

quindi

$$\ddot{x}\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) + 4\frac{\dot{x}^2 x}{l_0^2} + (\omega_0^2 + \omega_1^2)x + 2\omega_1^2\frac{x^3}{l_0^2} = 0.$$

3 - L'energia

$$E := \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = K + U$$

è una quantità conservata:

$$\dot{E} = \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} - \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) + \frac{m}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2)x^2 + \frac{m}{2}\frac{\omega_1^2}{l_0^2}x^4.$$

4 - Il tempo per arrivare da $x(t_0)$ ad $x(t)$ è

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx\ \frac{1}{\dot{x}}.$$

Inoltre

$$\dot{x}^2 = \frac{\frac{2E}{m} - (\omega_0^2 + \omega_1^2)x^2 - \omega_1^2\frac{x^4}{l_0^2}}{1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}}$$

quindi se $\dot{x}(\tau) > 0$ nell'intervallo di tempo per $\tau \in (t_0, t)$ allora

$$t - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx\ \frac{\sqrt{1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - (\omega_0^2 + \omega_1^2)x^2 - \omega_1^2\frac{x^4}{l_0^2}}}$$

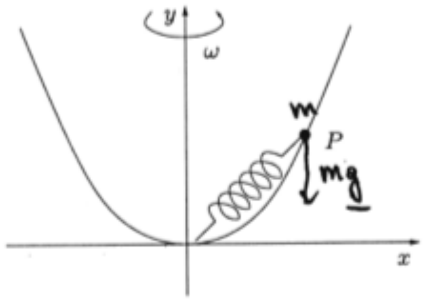
e invertendo $x(t) \mapsto t$, si trova il moto (se $\dot{x} < 0$ si procede analogamente).

<u>Esercizio 2.</u> Si ripeta l'esercizio precedente, nel caso in cui il piano verticale (x, y) ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare costante. In particolare, si identifichino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare di ω.

Soluzione:

1 - La posizione della particella in $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathbf{x} = \left(\cos(\omega t)x, \quad \frac{x^2}{l_0}, \quad \sin(\omega t)x\right)$$



quindi la sua velocità è

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\dot{x}\cos(\omega t) - \omega x \sin(\omega t), \quad 2\frac{x}{l_0}\dot{x}, \quad \dot{x}\sin(\omega t) + \omega x \cos(\omega t) \right)$$

quindi l'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

L'energia potenziale del sistema è rimane la stessa:

$$U = mg\frac{x^2}{l_0} + \frac{1}{2}kx^2\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right).$$

Quindi la Lagrangiana è

$$L(x,\dot{x}) = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) - mg\frac{x^2}{l_0} - \frac{1}{2}kx^2\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Se definiamo

$$\omega_0 := \sqrt{2\frac{g}{l_0}}, \quad \sqrt{\frac{k}{m}} := \omega_1$$

allora

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) - \frac{m}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2)x^2 - \frac{m}{2}\frac{\omega_1^2}{l_0^2}x^4.$$

2 - Le equazioni del moto sono

$$\ddot{x}\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) + 4\frac{\dot{x}^2 x}{l_0^2} + (\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2)x + 2\omega_1^2\frac{x^3}{l_0^2} = 0.$$

3 - L'energia

$$E := \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right) + \frac{m}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2)x^2 + \frac{m}{2}\frac{\omega_1^2}{l_0^2}x^4$$

è una quantità conservata.

4 - Per risolvere il moto per quadrature, si usa

$$\dot{x}^2 = \frac{\frac{2E}{m} - (\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2)x^2 - \omega_1^2\frac{x^4}{l_0^2}}{1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}}$$

per trovare

$$t - t_0 = \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx \, \frac{\sqrt{1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - (\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2)x^2 - \omega_1^2 \frac{x^4}{l_0^2}}}$$

dove il segno di fronte all'integrale va scelto a seconda del segno di $\dot{x}$. Da tale relazione si deduce $x(t)$.

5 - Il sistema si può vedere come un sistema con energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left(1 + 4\frac{x^2}{l_0^2}\right)$$

ed energia potenziale

$$U = \frac{m}{2}(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2)x^2 + \frac{m}{2}\frac{\omega_1^2}{l_0^2}x^4.$$

I punti d'equilibrio sono le soluzioni di $U'(\bar{x}) = 0$ quindi

$$\bar{x}\left((\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega^2) + 2\frac{\omega_1^2}{l_0^2}\bar{x}^2\right) = 0$$

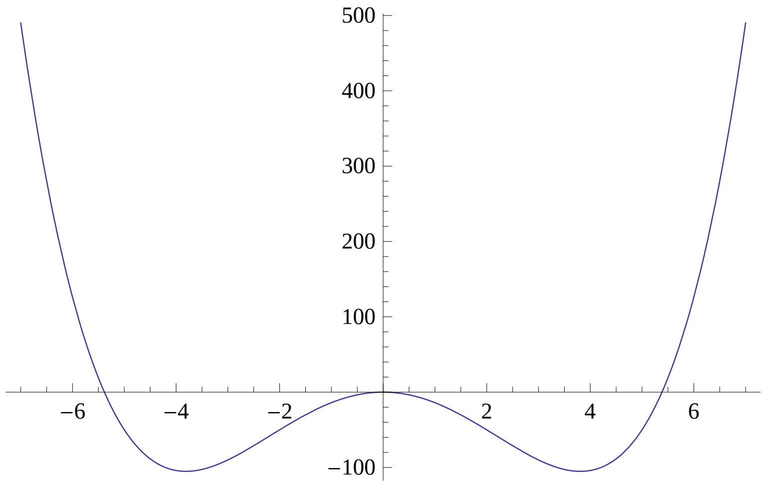
quindi

$$\bar{x} = 0 \quad \text{o} \quad \bar{x}^2 = l_0^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_1^2}{2\omega_1^2}$$

Se

$$\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2}$$

allora ci sono tre punti di equilibrio: 0, $\bar{x}_\pm$; inoltre 0 è un massimo di U e $\bar{x}_\pm$ sono minimi, e il grafico di U è



Se

$$\omega \leqslant \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2}$$

allora 0 è l'unico punto critico di U ed è un minimo. Usando i teoremi di stabilità lineare e di Dirichlet (che è valido anche nel caso in cui K sia una forma quadratica definita positiva in $\dot{x}$, vedi Teorema 53.8 delle dispense di Gentile), i minimi isolati del potenziale sono stabili, è i massimi sono instabili. Quindi se

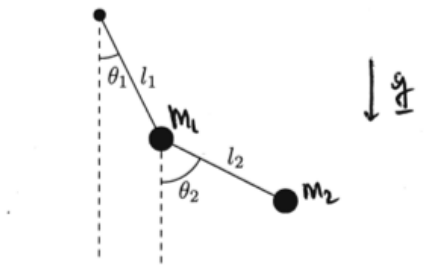
$$\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2}$$

allora 0 è instabile e $\bar{x}_\pm$ sono stabili. Se

$$\omega \leqslant \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2}$$

allora 0 è stabile.

<u>Esercizio 3.</u> Si consideri il doppio pendolo, come in figura.



Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate $(\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2)$, e la si usi per derivare le equazioni del moto sul vincolo. Si riconosca che tali equazioni sono le stesse derivate a esercitazioni con il metodo di eliminazione delle reazioni vincolati:

$$\begin{aligned} l_1\ddot\theta_1 &= \frac{g\big[-m_1\sin\theta_1 + m_2\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)\big] + m_2\big[l_2\dot\theta_2^2 + l_1\dot\theta_1^2\cos(\theta_2-\theta_1)\big]\sin(\theta_2-\theta_1)}{m_1 + m_2\sin^2(\theta_2-\theta_1)} \\ l_2\ddot\theta_2 &= \frac{-g(m_1+m_2)\cos\theta_1\sin(\theta_2-\theta_1) - \big[(m_1+m_2)l_1\dot\theta_1^2 + m_2l_2\dot\theta_2^2\cos(\theta_2-\theta_1)\big]\sin(\theta_2-\theta_1)}{m_1 + m_2\sin^2(\theta_2-\theta_1)}. \end{aligned}$$

Si identifichino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

Soluzione:

1 - Come è stato discusso a lezione, la Lagrangiana del sistema è

$$L(\theta_1,\theta_2;\dot\theta_1,\dot\theta_2) = \tfrac{m_1}{2}l_1^2\dot\theta_1^2 + \tfrac{m_2}{2}(l_1^2\dot\theta_1^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1))$$
$$+g((m_1+m_2)l_1\cos\theta_1 + m_2l_2\cos\theta_2)$$

quindi le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} (m_1+m_2)l_1^2\ddot\theta_1 + m_2l_1l_2(\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) - \dot\theta_2(\dot\theta_2-\dot\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1)) \\ \qquad = m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 \\ \\ m_2l_2^2\ddot\theta_2 + m_2l_1l_2(\ddot\theta_1\cos(\theta_2-\theta_1) - \dot\theta_1(\dot\theta_2-\dot\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1)) \\ \qquad = -m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2gl_2\sin\theta_2. \end{cases}$$

È semplice verificare che queste equazioni sono equivalenti a quelle sopra.

2 - L'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{m_1}{2}l_1^2\dot\theta_1^2 + \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot\theta_1^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1))$$

e la sua energia potenziale è

$$U = -g((m_1 + m_2)l_1 \cos\theta_1 + m_2 l_2 \cos\theta_2).$$

K è una forma quadratica definita positiva in $(\dot\theta_1, \dot\theta_2)$. I punti di equilibrio del sistema sono i punti critici di U, quindi

$$\bar\theta_1 \in \{0, \pi\}, \quad \bar\theta_2 \in \{0, \pi\}.$$

La Hessiana di U (la matrice delle seconde derivate di U) è

$$HU = g \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1 \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & m_2 l_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$HU(0,0) = g \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1 & 0 \\ 0 & m_2 l_2 \end{pmatrix}$$

quindi $(0,0)$ è un minimo isolato di U, quindi è stabile. Nello stesso modo, si dimostra che $(0,\pi)$, $(\pi,0)$ e (π,π) sono di flesso o massimi, e quindi instabili.