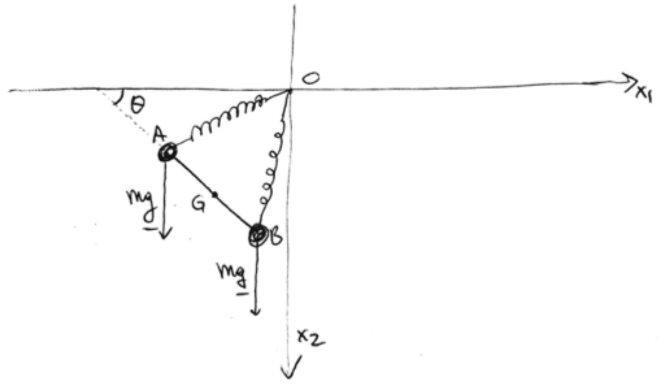
Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 7 (22-11-2013)

ESERCIZIO 1. Una sbarra rigida AB di massa trascurabile e di lunghezza ℓ ha, fissati agli estremi, due punti materiali di massa m. La sbarra è vincolata a muoversi su un piano verticale (x_1, x_2), con gli assi fissati come in figura. Sugli estremi della sbarra, oltre la forza peso, agiscono due forze elastiche di centro O e di uguale costante elastica $k > 0$.



- Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle coordinate $\theta, \mathbf{x}_G$, dove θ è l'angolo formato dalla sbarra con l'asse x_1 (vedi figura) e $\mathbf{x}_G = (x_{G,1}, x_{G,2})$ sono le coordinate del baricentro del sistema.
- Si derivino e si risolvano le equazioni del moto.
- Si riconosca che i moti possibili sono tali che il baricentro si muove su una traiettoria ellittica (eventualmente degenere), mentre il moto relativo al baricentro è circolare uniforme.
- Si identifichino tutte le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

ESERCIZIO 2. Una particella di massa m e di carica q è vincolata a muoversi su una guida liscia di equazione $y = A \sin \omega x$. La particella è soggetta alla forza peso $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ e al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_0 \cos \omega x, 0)$.

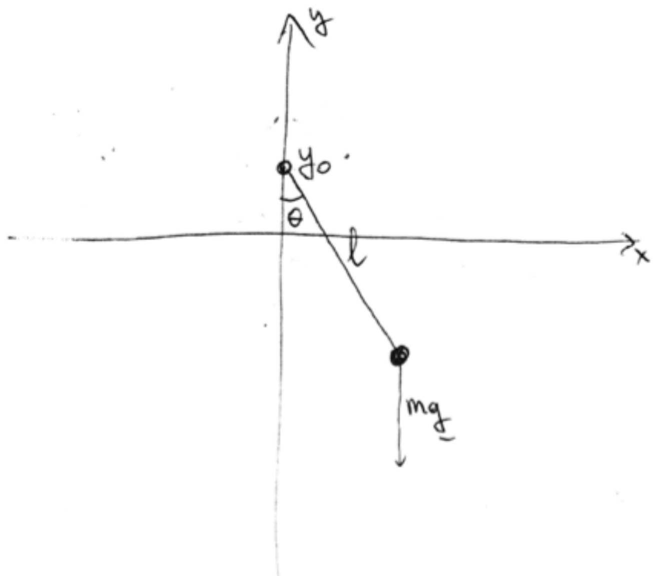
- Si determini l'energia potenziale associata alla forza attiva conservativa totale che agisce sulla particella.
- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si studi qualitativamente il moto (in particolare, si identifichino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si disegnino le traiettorie del sistema nell'opportuno piano delle fasi) e lo si risolva per quadrature.

Esercizio 3. Si considerino due Lagrangiane $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ e $\mathcal{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ che differiscono per una derivata totale rispetto al tempo:

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t) \ ,$$

dove $\frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t) = \partial_{\mathbf{q}} F(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \partial_t F(\mathbf{q}, t)$. Si dimostri che tali Lagrangiane sono associate alle stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

Esercizio 4. Scrivere la Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ per un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ, il cui punto di sospensione $(0, y_O)$ oscilli verticalmente secondo la legge $y_O = y_O(t) = a \cos \omega t$.



Usando il risultato dell'esercizio precedente, si riconosca che l'equazione di Eulero-Lagrange associate è la stessa di quella associata alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 - m\ell a\omega^2 \cos \omega t \cos \theta + mg\ell \cos \theta \ .$$

Infine, si verifichi che l'equazione di Eulero-Lagrange, se linearizzata attorno al punto di equilibrio *instabile*, si riduce all'equazione

$$\ddot{\varphi} = (\alpha - \beta \cos \omega t)\varphi \ , \qquad \alpha = \frac{g}{\ell} \ , \quad \beta = \frac{a\omega^2}{\ell}$$

nota come *equazione di Mathieu*[1].

[1] Un fatto interessante (che però non dimostreremo) è che, per ω abbastanza grande, il punto di equilibrio $\varphi = 0$ per l'equazione di Mathieu diventa stabile (mentre è instabile per ω piccolo). Tale risultato può essere poi usato per dimostrare che il punto di equilibrio $\theta = \pi$ del pendolo invertito con punto di sospensione oscillante è stabile, se la frequenza delle oscillazioni è abbastanza grande.