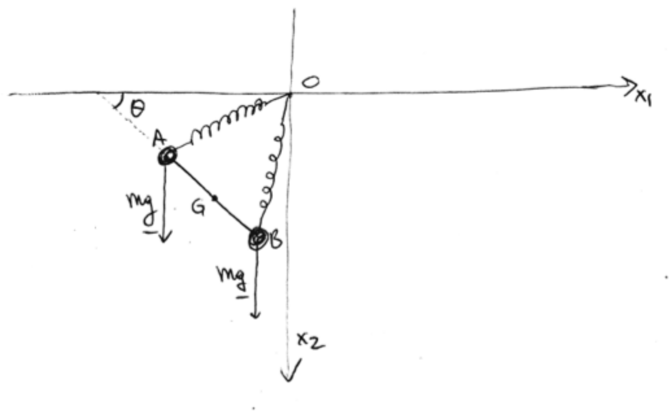
Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato 7 (22-11-2013)

Esercizio 1. Una sbarra rigida AB di massa trascurabile e di lunghezza ℓ ha, fissati agli estremi, due punti materiali di massa m. La sbarra è vincolata a muoversi su un piano verticale (x_1, x_2), con gli assi fissati come in figura. Sugli estremi della sbarra, oltre la forza peso, agiscono due forze elastiche di centro O e di uguale costante elastica $k > 0$.



- Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle coordinate $\theta, \mathbf{x}_G$, dove θ è l'angolo formato dalla sbarra con l'asse x_1 (vedi figura) e $\mathbf{x}_G = (x_{G,1}, x_{G,2})$ sono le coordinate del baricentro del sistema.
- Si derivino e si risolvano le equazioni del moto.
- Si riconosca che i moti possibili sono tali che il baricentro si muove su una traiettoria ellittica (eventualmente degenere), mentre il moto relativo al baricentro è circolare uniforme.
- Si identifichino tutte le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

Soluzione:

1 - Sia

$$\mathbf{e}_r := (\cos\theta, \sin\theta), \quad \mathbf{e}_\theta := (-\sin\theta, \cos\theta).$$

La posizione di A e B è data da

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_G - \frac{l}{2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{x}_G + \frac{l}{2}\mathbf{e}_r$$

quindi

$$\dot{\mathbf{x}}_A = \dot{\mathbf{x}}_G - \frac{l}{2}\dot\theta\mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{x}}_B = \dot{\mathbf{x}}_G + \frac{l}{2}\dot\theta\mathbf{e}_\theta$$

quindi l'energia cinetica è data da

$$K = \frac{1}{2}m\left(2(\dot{\mathbf{x}}_G)^2 + \frac{l^2}{2}\dot\theta^2\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = -2mgx_{G,2} + \frac{1}{2}k\left(2\mathbf{x}_G^2 + \frac{l^2}{2}\right)$$

(si noti che il segno meno nell'energia potenziale gravitazionale è dovuto alla scelta dell'asse verticale verso il basso) quindi la Lagrangiana del sistema è

$$L(\mathbf{x}_G, \theta; \dot{\mathbf{x}}_G, \dot{\theta}) = K - U = m(\dot{\mathbf{x}}_G)^2 + m\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + 2mgx_{G,2} - k\mathbf{x}_G^2 - k\frac{l^2}{4}.$$

Possiamo dimenticare il termine costante di L che non cambia le equazioni di Eulero-Lagrange e rimpiazzare questa lagrangiana con:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_G, \theta; \dot{\mathbf{x}}_G, \dot{\theta}) = m(\dot{\mathbf{x}}_G)^2 + m\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + 2mgx_{G,2} - k\mathbf{x}_G^2.$$

2 - Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} \ddot{x}_{G,1} = -\omega_1^2 x_{G,1} \\ \ddot{x}_{G,2} = -\omega_1^2 x_{G,2} + g \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

dove $\omega_1 := \sqrt{k/m}$, quindi

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

dove $\omega := \dot{\theta}(0)$ e $\theta_0 := \theta(0)$, e

$$\begin{cases} x_{G,1}(t) = a\cos(\omega_1 t) + b\sin(\omega_1 t) \\ x_{G,2}(t) = c\cos(\omega_1 t) + d\sin(\omega_1 t) + \frac{g}{\omega_1^2} \end{cases}$$

quindi $\exists(\phi, \psi) \in [0, 2\pi)$ tali che

$$\begin{cases} x_{G,1}(t) = \alpha\cos(\omega_1 t + \phi) \\ x_{G,2}(t) - \frac{g}{\omega_1^2} = \beta\sin(\omega_1 t + \psi). \end{cases}$$

3 - $\theta(t)$ è lineare in t, quindi la sbarra ruota attorno il baricentro con una velocità angolare costante. Per quanto riguarda il moto di $\mathbf{x}_G$, definiamo $y_1 := x_{G,1}$ e $y_2 := x_{G,2} - g/\omega_1^2$ e dimostriamo che la traiettoria di $\mathbf{y}$ è un'ellisse centrata nell'origine (cosicché la traiettoria di $\mathbf{x}_G$ è un'ellisse centrata in $(0, g/\omega_1^2)$). Si noti che le equazioni parametriche per la traiettoria di $\mathbf{y}$ sono semplicemente

$$\begin{cases} y_1(\tau) = \alpha\cos\tau \\ y_2(\tau) = \beta\sin(\tau + \delta), \end{cases}$$

dove $\tau = \omega_1 t + \phi$ e $\delta = \psi - \phi$.

Se $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ la traiettoria di $\mathbf{y}$ è un segmento con punto medio nell'origine, che può essere pensato come un'ellisse degenere. Analogamente, se $\alpha, \beta \neq 0$ e $\delta = \pm\pi/2$, si ha $y_2 = \pm(\beta/\alpha)y_1$, con $y_1 \in [-\alpha, \alpha]$: quindi anche in questo caso la traiettoria di $\mathbf{y}$ è un segmento con punto medio nell'origine, che può essere pensato come un'ellisse degenere.

Consideriamo il caso non degenere, i.e., α e β entrambi diversi da zero e $\cos\delta \neq 0$. Sviluppando il seno nell'espressione per y_2 troviamo:

$$y_2 = \beta\big(\sin\tau\cos\delta + \cos\tau\sin\delta\big) = \beta\big(\sin\tau\cos\delta + \alpha^{-1}y_1\sin\delta\big)$$

dove abbiamo usato che $y_1 = \alpha \cos \tau$. Vediamo quindi che l'equazione parametrica assegnata è equivalente a

$$\begin{cases} y_1/\alpha = \cos \tau \\ y_2/(\beta \cos \delta) - y_1 \sin \delta/(\alpha \cos \delta) = \sin \tau, \end{cases}$$

che implica

$$\frac{y_1^2}{\alpha^2} + \Big(\frac{y_2}{\beta \cos \delta} - \frac{y_1 \sin \delta}{\alpha \cos \delta}\Big)^2 = 1$$

ovvero

$$A y_1^2 + B y_2^2 + C y_1 y_2 = 1,$$

con $A = 1/(\alpha^2 \cos^2 \delta)$, $B = 1/(\beta^2 \cos^2 \delta)$, e $C = -2 \sin \delta/(\alpha\beta \cos^2 \delta)$. Il discriminante è

$$C^2 - 4AB = -\frac{4}{\alpha^2 \beta^2} \cos^2 \delta < 0 \ ,$$

e quindi l'equazione è quella di un'ellisse non degenere centrata nell'origine.

4 - L'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva quindi i punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale U:

$$\nabla U(\bar{x}_{G,1}, \bar{x}_{G,2}, \bar{\theta}) = \begin{pmatrix} 2k\bar{x}_{G,1} \\ 2k\bar{x}_{G,2} - 2mg \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

quindi

$$\bar{x}_{G,1} = 0, \quad \bar{x}_{G,2} = \frac{g}{\omega_1^2}, \quad \bar{\theta} \in [0, 2\pi).$$

Inoltre, dato che $\ddot{\theta} = 0$, i punti di equilibrio sono tutti instabili ($\forall \dot{\theta}(0) \neq 0$, $\{\theta(t),\ t \in \mathbb{R}\} = [0, 2\pi)$).

<u>Esercizio 2.</u> Una particella di massa m e di carica q è vincolata a muoversi su una guida liscia di equazione $y = A \sin \omega x$. La particella è soggetta alla forza peso $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ e al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_0 \cos \omega x, 0)$.

- Si determini l'energia potenziale associata alla forza attiva conservativa totale che agisce sulla particella.
- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si studi qualitativamente il moto (in particolare, si identifichino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si disegnino le traiettorie del sistema nell'opportuno piano delle fasi) e lo si risolva per quadrature.

Soluzione:

1 - La forza attiva complessiva che agisce sulla particella è

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} qE_0 \cos \omega x \\ -mg \end{pmatrix}$$

L'energia potenziale associata è quindi

$$U = mgy - \frac{qE_0}{\omega} \sin(\omega x)$$

Infatti, si verifica immediatamente che $-\nabla U(x, y) = (qE_0 \cos \omega x, -mg)$.

2 - L'equazione del vincolo è

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ A \sin \omega x \end{pmatrix} =: \boldsymbol{\gamma}(x)$$

cosicché

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\gamma}(x(t)) = \dot{x} \begin{pmatrix} 1 \\ A\omega \cos \omega x \end{pmatrix}$$

e quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \big(1 + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega x)\big)$$

Combinando questa espressione con quella dell'energia potenziale troviamo che la Lagrangiana è

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - U(\boldsymbol{\gamma}(x)) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega x)) - \left(mgA - \frac{qE_0}{\omega} \right) \sin(\omega x) =: T(x, \dot{x}) - V(x).$$

3 - Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$m \frac{d}{dt} \big(\dot{x}(1 + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega x))\big) = -\omega \left(mgA - \frac{qE_0}{\omega} \right) \cos(\omega x) - m \dot{x}^2 A^2 \omega^3 \sin(\omega x) \cos(\omega x)$$

quindi

$$\ddot{x}(1 + A^2 \omega^2 \cos^2(\omega x)) = \left(\dot{x}^2 A^2 \omega^3 \sin(\omega x) - gA\omega + \frac{qE_0}{m} \right) \cos(\omega x).$$

4.1 - Dato che l'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva in $\dot{x}$, possiamo trovare i punti di equilibrio e studiare la sua stabilità studiando il potenziale

$$V(x) = -\left(mgA - \frac{qE_0}{\omega} \right) \sin(\omega x) \, .$$

Se $mgA - qE_0/\omega \neq 0$, allora i punti critici di V sono

$$\bar{x}_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$; inoltre

- se $mgA - qE_0/\omega > 0$ allora $\bar{x}_{2k}$ sono instabili (in quanto massimi locali isolati) e x_{2k+1} sono stabili (in quanto minimi locali isolati).
- se $mgA - qE_0/\omega < 0$ allora $\bar{x}_{2k}$ sono stabili e x_{2k+1} sono instabili.

Se invece $mgA - qE_0/\omega = 0$ allora ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è un punto d'equilibrio instabile (per la conservazione dell'energia $\dot{x}^2 = E/(1 + A^2\omega^2 \cos^2 \omega x) \geq E/(1 + A^2\omega^2) =: v_{min}^2$ che è strettamente positivo per ogni dato iniziale con $\dot{x}(0) \neq 0$: quindi ogni dato iniziale a velocità non nulla evolve in un moto con velocità $\geq v_{min} > 0$, che esce da ogni intervallo prefissato in tempo finito).

4.2 - Il piano delle fasi è (x, p) dove

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + A^2\omega^2 \cos^2(\omega x)).$$

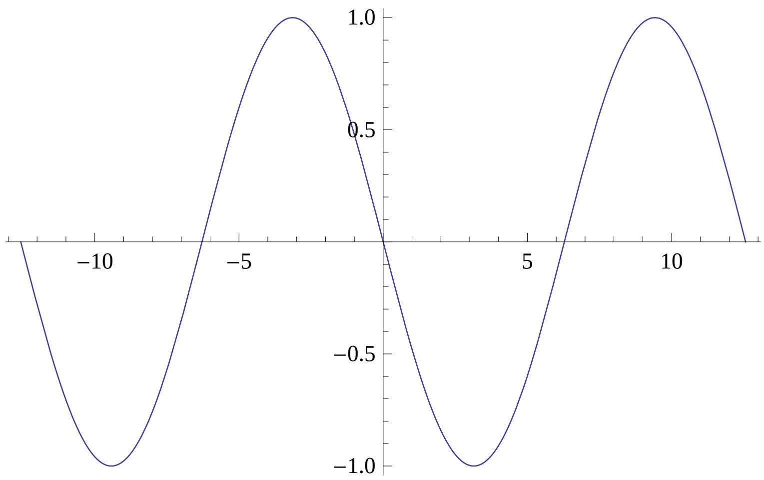
L'energia

$$E = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{2m(1 + A^2\omega^2\cos^2(\omega x))} + \left(mgA - \frac{qE_0}{\omega}\right)\sin(\omega x)$$

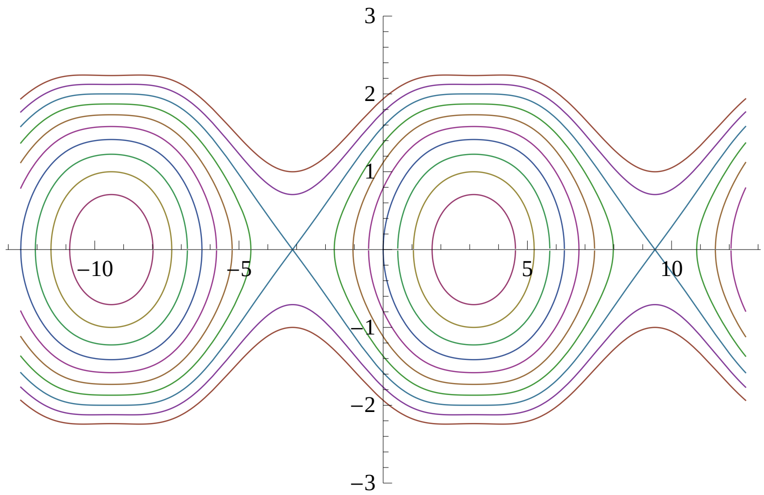
è una costante del moto, inoltre

$$p = \pm\sqrt{2m(1 + A^2\omega^2\cos^2(\omega x))(E - V(x))}$$

da cui si deducono le curve di livello nel piano (x, p): il grafico di V è



quindi le curve di livello sono



Le curve di livello nel piano $(x, \dot{x})$ si ottengono analogamente.

4.3 - Per risolvere il moto per quadrature, usiamo la conservazione dell'energia e

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2m\frac{E - V(x)}{1 + A^2\omega^2\cos^2(\omega x)}}$$

quindi

$$t = \pm\int_{x(0)}^{x(t)}\sqrt{\frac{1 + A^2\omega^2\cos^2(\omega x)}{2m(E - V(x))}}dx.$$

<u>Esercizio 3.</u> Si considerino due Lagrangiane $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ e $\mathcal{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ che differiscono per una derivata totale rispetto al tempo:

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t)\ ,$$

dove $\frac{d}{dt}F(\mathbf{q},t) = \partial_{\mathbf{q}}F(\mathbf{q},t)\cdot\dot{\mathbf{q}} + \partial_t F(\mathbf{q},t)$. Si dimostri che tali Lagrangiane sono associate alle stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

Soluzione: La lagrangiana $\mathcal{L}'$ ha la forma:

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) + \partial_{\mathbf{q}}F(\mathbf{q},t)\cdot\dot{\mathbf{q}} + \partial_t F(\mathbf{q},t)\ ,$$

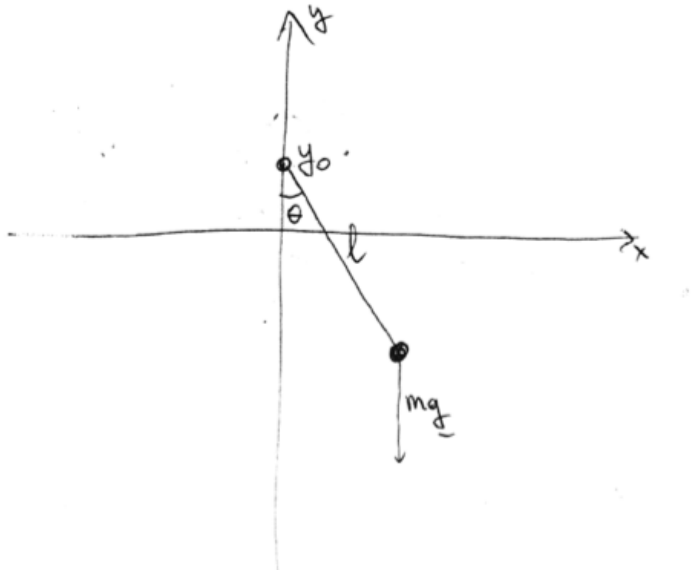
quindi le sue equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti a $\mathcal{L}'$ sono

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial F}{\partial\mathbf{q}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\Big(\partial_{\mathbf{q}}F(\mathbf{q},t)\cdot\dot{\mathbf{q}} + \partial_t F(\mathbf{q},t)\Big)$$

e quindi sono le stesse di $\mathcal{L}$, semplicemente perché

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 F(\mathbf{q},t)}{\partial q_i\,\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 F(\mathbf{q},t)}{\partial t\,\partial q_i}\ .$$

<u>Esercizio 4.</u> Scrivere la Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ per un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ, il cui punto di sospensione $(0, y_O)$ oscilli verticalmente secondo la legge $y_O = y_O(t) = a\cos\omega t$.



Usando il risultato dell'esercizio precedente, si riconosca che l'equazione di Eulero-Lagrange associate è la stessa di quella associata alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - m\ell a\omega^2\cos\omega t\cos\theta + mg\ell\cos\theta\ .$$

Infine, si verifichi che l'equazione di Eulero-Lagrange, se linearizzata attorno al punto di equilibrio *instabile*, si riduce all'equazione

$$\ddot{\varphi} = (\alpha - \beta\cos\omega t)\varphi\ , \qquad \alpha = \frac{g}{\ell}\ , \quad \beta = \frac{a\omega^2}{\ell}$$

nota come *equazione di Mathieu*[1].

[1] Un fatto interessante (che però non dimostreremo) è che, per ω abbastanza grande, il punto di equilibrio $\varphi = 0$ per l'equazione di Mathieu diventa stabile (mentre è instabile per ω piccolo). Tale risultato può essere poi usato per dimostrare che il punto di equilibrio $\theta = \pi$ del pendolo invertito con punto di sospensione oscillante è stabile, se la frequenza delle oscillazioni è abbastanza grande.

Soluzione:

1 - La posizione della particella è

$$\mathbf{x} = (0, a\cos(\omega t)) + l(\sin\theta, -\cos\theta)$$

quindi

$$\dot{\mathbf{x}} = (0, -a\omega\sin(\omega t)) + l\dot{\theta}(\cos\theta, \sin\theta)$$

quindi l'energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2\sin^2(\omega t) - 2la\omega\dot{\theta}\sin\theta\sin(\omega t))$$

e l'energia potenziale è

$$U = mg(a\cos(\omega t) - l\cos\theta)$$

quindi la Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\theta;\dot{\theta};t) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + a^2\omega^2\sin^2(\omega t) - 2la\omega\dot{\theta}\sin\theta\sin(\omega t)) - mg(a\cos(\omega t) - l\cos\theta)$$

Inoltre, dato che

$$\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t) - mga\cos(\omega t) = \frac{d}{dt}\int_0^t d\tau\Big(\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega\tau) - mga\cos(\omega\tau)\Big)$$

e

$$\dot{\theta}\sin\theta\sin(\omega t) = -\frac{d}{dt}(\cos\theta\sin(\omega t)) + \omega\cos\theta\cos(\omega t)$$

possiamo ridurre la Lagrangiana a

$$\mathcal{L}'(\theta;\dot{\theta};t) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 - 2la\omega^2\cos\theta\cos(\omega t)) + mgl\cos\theta$$

che è equivalente a

$$\mathcal{L}'(\theta;\dot{\theta};t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml(g - a\omega^2\cos(\omega t))\cos\theta.$$

2 - Le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\ddot{\theta} = -(\alpha - \beta\cos(\omega t))\sin\theta$$

dove

$$\alpha := \frac{g}{l}, \quad \beta := \frac{a\omega^2}{l}.$$

I punti di equilibrio del sistema sono 0 (che è stabile nel caso in cui $\omega = 0$) e π (che è instabile nel caso in cui $\omega = 0$). Inoltre

$$\sin(\pi + \varphi) = -\varphi + O(\varphi^3)$$

quindi l'equazione del moto linearizzata attorno a π è

$$\ddot{\varphi} = (\alpha - \beta\cos(\omega t))\varphi.$$