Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato 8 (29-11-2013)

Esercizio 1. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico tridimensionale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\partial_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}),$$

con

$$U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)\ , \qquad V(\rho) = \alpha \frac{\log^2(\rho/r_0)}{\rho^2},$$

e $m, \alpha, r_0 > 0$. Piú in dettaglio:

1. Si trovino gli integrali primi del moto;
2. Si disegni il grafico del potenziale V e di quello efficace V_{eff} al variare del momento angolare;
3. Si studi qualitativamente il moto distinguendo i casi $0 \leq L < \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$, $L = \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$ e $L > \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$. In particolare, nel caso $0 \leq L < \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
   - Si dimostri che esistono un punto di equilibrio stabile e uno instabile del moto radiale;
   - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
   - Si dica per quali valori dell'energia il moto radiale è periodico;
   - Per tali valori si calcolino i punti di inversione e il periodo del moto radiale come integrale definito;
   - Si calcoli inoltre per gli stessi valori dell'energia il periodo del moto angolare come integrale definito;
   - Si dica sotto quali condizioni il moto complessivo è periodico.
4. Nel caso $L = \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
   - Si trovi un punto di equilibrio del moto radiale e se ne discuta la stabilità;
   - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
   - Si dimostri che l'unica orbita periodica del moto radiale è quella banale (ρ costantemente uguale alla posizione di equilibrio); si calcoli il periodo del moto complessivo corrispondente.
5. Nel caso $L > \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
   - Si dimostri che non esistono punti di equilibrio del moto radiale;
   - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$.
   - Si dimostri che non esistono orbite periodiche del moto radiale e si discutano qualitativamente le proprietà del moto sia radiale che complessivo.

Esercizio 2. Si studi qualitativamente il moto del sistema meccanico tridimensionale ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$) formato da due particelle di massa m dato da

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha \left(1 - 3\,|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4\right)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\,, \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha \left(1 - 3\,|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4\right)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\,, \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$, ovvero

1. Si decomponga il moto complessivo in moto del centro di massa piú moto nella coordinata relativa e si studi qualitativamente il moto nella coordinata relativa;

2. Si trovino gli integrali primi del moto relativo;

3. Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:

   (a) Per $0 \leq L^2 < \frac{1}{12} m\alpha$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico;

   (b) Per $L^2 = \frac{1}{12} m\alpha$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa;

   (c) Per $L^2 > \frac{1}{12} m\alpha$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

<u>Esercizio 3.</u> Si consideri l'oscillatore armonico bidimensionale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -k\mathbf{x}$$

Come discusso ad esercitazioni, tutte le orbite del sistema sono periodiche. Quindi il moto del sistema, che a priori si svolge in uno spazio delle fasi 4-dimensionale, si svolge in realtà su una curva, cioè su un sottospazio unidimensionale dello spazio delle fasi. Tale riduzione dimensionale corrisponde a 3 integrali primi indipendenti (si noti che l'energia meccanica e il momento angolare in un sistema bidimensionale forniscono solo 2 grandezze conservate, quindi è necessario identificare un ulteriore integrale primo "nascosto").

1. Si determinino i 3 integrali primi riconoscendo che gli elementi della matrice simmetrica

   $$A_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{k}{2}x_i x_j$$

   sono tutte grandezze conservate del moto (e si noti che una matrice simmetrica 2×2 ha solo 3 elementi di matrice indipendenti, poiché $A_{12} = A_{21}$).

2. Si riconosca che $\mathrm{Tr}A$ è uguale all'energia meccanica e che il $\det A$ è proporzionale al modulo quadro del momento angolare. Il terzo integrale primo indipendente può quindi essere identificato, ad es., con $4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2$. Tale combinazione gioca un ruolo nel calcolo della traiettoria, vedi prossimo punto.

3. Si usi la conservazione dei 3 integrali primi per derivare l'equazione della traiettorie. Piú precisamente si verifichi che:

   (a) In coordinate polari,

   $$\frac{(\rho')^2}{\rho^6} + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{mE}{L^2}\right)^2 = \frac{m^2}{L^4}\left[4A_{12}^2 + (A_{11} - A_{22})^2\right]$$

   dove $\rho' = \rho'(\theta) = \frac{d\rho}{d\theta}$.

   (b) Si verifichi che l'equazione $\rho = \rho(\theta)$ di un'ellisse centrata nell'origine in coordinate polari (che ha la forma $a^{-2}\rho^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + b^{-2}\rho^2 \cos^2(\theta - \theta_0) = 1$ dove a, b sono i due semiassi) soddisfa l'equazione differenziale ricavata sopra. Si usi tale osservazione per concludere che la traiettoria descritta dalla soluzione alle equazioni del moto è un'ellisse e per calcolarne i semiassi in termini degli integrali primi del moto.

NOTA. Per le soluzioni, vedi tutorato del 22/11/2012 dell'A.A. 2012-13, e problema 1 del secondo esonero dell'A.A. 2011-12.