Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

Tutorato 9 (6-12-2012)

<u>Esercizio 1.</u> Una molecola è costituita da due atomi identici di massa $m = 2 * 10^{-30}$Kg. L'interazione tra i due atomi (di coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$) è descritta fenomenologicamente dal potenziale centrale $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$, dove

$$V(\rho) = \epsilon\Big[3\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{10} - 5\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^6\Big]$$

con $\epsilon = 2 * 10^{-22}\text{m}^2\text{Kg/s}^2$ e $r_0 = 3 * 10^{-10}$m. Si determinino:

1. L'insieme di valori degli integrali primi E (energia meccanica del moto relativo) ed L (momento angolare del moto relativo) per cui il sistema forma uno stato legato (molecola)
2. Il valore dell'energia di legame della molecola al variare di E, L nell'insieme di cui al punto 1 (con energia di legame si intende l'energia necessaria per separare i due atomi quando si trovano nello stato piú legato possibile: in formule, è la differenza tra il sup e l'inf delle energie per cui il moto è limitato).
3. La distanza di equilibrio tra i due atomi (i.e., la distanza corrispondente al punto di equilibrio stabile ρ_0 del moto radiale) al variare di L
4. La frequenza di vibrazione attorno alla distanza di equilibrio del sistema (i.e., la frequenza delle piccole oscillazioni del moto radiale attorno a ρ_0).

<u>Esercizio 2.</u> Si dimostri il teorema di Newton, ovvero il fatto che una distribuzione di massa $\sigma(\mathbf{r})$ a simmetria sferica (i.e., $\sigma(\mathbf{r}) = \tilde{\sigma}(|\mathbf{r}|)$ per un'opportuna funzione $\tilde{\sigma}$) e a supporto compatto (i.e., $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ se $|\mathbf{r}| \geq R_0 > 0$) genera un campo gravitazionale che coincide, al di fuori del suo supporto, con quello generato da una massa puntiforme $M = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ localizzata nel centro della distribuzione stessa. In altre parole, posta una massa puntiforme m in un qualsiasi punto $\mathbf{x}$ al di fuori del supporto di σ, si dimostri che il potenziale gravitazionale del sistema costituito dalla massa m e dalla distribuzione di massa σ è lo stesso di un sistema di due masse puntiformi m e M poste l'una in $\mathbf{x}$ e l'altra nel centro della distribuzione σ.

<u>Esercizio 3.</u> Si consideri il problema dei due corpi, i.e., il moto in campo centrale di due particelle di massa m_1, m_2 che si attraggono con la forza generata dal potenziale gravitazionale $V(\rho) = -k/\rho$ con $k > 0$. Si verifichi che, in aggiunta agli integrali primi E ed L, il moto relativo ammette un'ulteriore grandezza conservata, definita in termini del *vettore di Runge-Lenz* $\mathbf{A} = \mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$. In particolare, si verifichi che: (i) le tre componenti di $\mathbf{A}$ sono integrali primi del moto; (ii) $\mathbf{A}$ è ortogonale a $\mathbf{L}$; (iii) $|\mathbf{A}|^2$ è una funzione di E e di L. Quindi $\mathbf{A}$ definisce una sola grandezza conservata aggiuntiva oltre E ed $\mathbf{L}$, che può essere scelta come l'angolo tra $\mathbf{A}$ ed un asse di riferimento sul piano dell'orbita.

Usando la conservazione di $\mathbf{A}$, si determini l'equazione della traiettoria in coordinate polari. In particolare, si scriva $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}})$ in coordinate polari e si riconosca che tale equazione è equivalente a $\rho(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) = L^2/\mu k$, con $e = |\mathbf{A}|/\mu k$. Nel caso $0 \leq e < 1$ si è già verificato a lezione che $\rho = \rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (ellisse). Nei casi in cui $e \geq 1$, si verifichi esplicitamente che l'equazione $\rho(\theta) = \rho_0/(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$ descrive una conica con uno dei fuochi centrato nell'origine, i.e., si verifichi che:

1. per $e = 1$, $\rho = \rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti equidistante dall'origine e da una retta non passante per l'origine detta direttrice (parabola);

2. per $e > 1$, $\rho = \rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti la cui differenza delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (iperbole).