Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

FM210 - Fisica Matematica 1

TUTORATO 9 (6-12-2012)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Una molecola è costituita da due atomi identici di massa $m = 2 * 10^{-30}$Kg. L'interazione tra i due atomi (di coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$) è descritta fenomenologicamente dal potenziale centrale $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$, dove

$$V(\rho) = \epsilon\left[3\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{10} - 5\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{6}\right]$$

con $\epsilon = 2 * 10^{-22}\text{m}^2\text{Kg/s}^2$ e $r_0 = 3 * 10^{-10}$m. Si determinino:

1. L'insieme di valori degli integrali primi E (energia meccanica del moto relativo) ed L (momento angolare del moto relativo) per cui il sistema forma uno stato legato (molecola)
2. Il valore dell'energia di legame della molecola al variare di E, L nell'insieme di cui al punto 1 (con energia di legame si intende l'energia necessaria per separare i due atomi quando si trovano nello stato piú legato possibile: in formule, è la differenza tra il sup e l'inf delle energie per cui il moto è limitato).
3. La distanza di equilibrio tra i due atomi (i.e., la distanza corrispondente al punto di equilibrio stabile ρ_0 del moto radiale) al variare di L
4. La frequenza di vibrazione attorno alla distanza di equilibrio del sistema (i.e., la frequenza delle piccole oscillazioni del moto radiale attorno a ρ_0).

Soluzione: Vedi la soluzione al problema 1 del Tutorato 8 [29/11/2012] dell'A.A. 2012-13.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Si dimostri il teorema di Newton, ovvero il fatto che una distribuzione di massa $\sigma(\mathbf{r})$ a simmetria sferica (i.e., $\sigma(\mathbf{r}) = \tilde{\sigma}(|\mathbf{r}|)$ per un'opportuna funzione $\tilde{\sigma}$) e a supporto compatto (i.e., $\sigma(\mathbf{r}) = 0$ se $|\mathbf{r}| \geq R_0 > 0$) genera un campo gravitazionale che coincide, al di fuori del suo supporto, con quello generato da una massa puntiforme $M = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ localizzata nel centro della distribuzione stessa. In altre parole, posta una massa puntiforme m in un qualsiasi punto $\mathbf{x}$ al di fuori del supporto di σ, si dimostri che il potenziale gravitazionale del sistema costituito dalla massa m e dalla distribuzione di massa σ è lo stesso di un sistema di due masse puntiformi m e M poste l'una in $\mathbf{x}$ e l'altra nel centro della distribuzione σ.

Soluzione: Consideriamo una massa m puntuale localizzata in $\mathbf{x}$, sottomessa al potenziale gravitazionale di una distribuzione di massa $\tilde{\sigma}(|\mathbf{r}|)$ a simmetria sferica. Il potenziale gravitazionale è

$$U(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{r}\ \frac{G\tilde{\sigma}(|\mathbf{r}|)m}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}$$

dove $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ è la costante di gravitazione universale. Introduciamo le coordinate sferiche per $\mathbf{r}$: (r, θ, ϕ)

$$\mathbf{r} =: \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Dato che la distribuzione di massa $\tilde{\sigma}$ è a simmetria sferica, anche il potenziale $U(\mathbf{x})$ ha la stessa simmetria: $U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)$. Per calcolare $V(x)$, con $x = |\mathbf{x}| > R_0$, dove R_0 è il raggio del supporto di $\tilde{\sigma}$, possiamo allora assumere senza perdita di generalità che $\mathbf{x} = (0, 0, x)$. Riscriviamo U come

$$U(\mathbf{x}) = V(x) = Gm \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; r^2 \sin\theta \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xr\cos\theta}}.$$

La funzione integranda è indipendente da ϕ, quindi l'integrale su ϕ dà semplicemente 2π. L'integrale su θ si calcola immediatamente con la sostituzione $t = \cos\theta$:

$$\int_0^\pi d\theta \; \frac{\sin\theta}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xr\cos\theta}} = \int_{-1}^1 dt \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xrt}} =$$
$$= -\frac{\sqrt{x^2 + r^2 - 2xrt}}{xr}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{xr}\Big[(x + r) - (x - r)\Big] = \frac{2}{x}$$

quindi

$$U(\mathbf{x}) = \frac{Gm}{|\mathbf{x}|} \int_0^\infty dr \; 4\pi r^2 \tilde{\sigma}(r) = \frac{Gm}{|\mathbf{x}|} \int d\mathbf{r} \; \tilde{\sigma}(|\mathbf{r}|) = \frac{GmM}{|\mathbf{x}|}.$$

ESERCIZIO 3. Si consideri il problema dei due corpi, i.e., il moto in campo centrale di due particelle di massa m_1, m_2 che si attraggono con la forza generata dal potenziale gravitazionale $V(\rho) = -k/\rho$ con $k > 0$. Si verifichi che, in aggiunta agli integrali primi E ed L, il moto relativo ammette un'ulteriore grandezza conservata, definita in termini del *vettore di Runge-Lenz* $\mathbf{A} = \mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$. In particolare, si verifichi che: (i) le tre componenti di $\mathbf{A}$ sono integrali primi del moto; (ii) $\mathbf{A}$ è ortogonale a $\mathbf{L}$; (iii) $|\mathbf{A}|^2$ è una funzione di E e di L. Quindi $\mathbf{A}$ definisce una sola grandezza conservata aggiuntiva oltre E ed $\mathbf{L}$, che può essere scelta come l'angolo tra $\mathbf{A}$ ed un asse di riferimento sul piano dell'orbita.

Usando la conservazione di $\mathbf{A}$, si determini l'equazione della traiettoria in coordinate polari. In particolare, si scriva $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mu\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}})$ in coordinate polari e si riconosca che tale equazione è equivalente a $\rho(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) = L^2/\mu k$, con $e = |\mathbf{A}|/\mu k$. Nel caso $0 \leq e < 1$ si è già verificato a lezione che $\rho = \rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (ellisse). Nei casi in cui $e \geq 1$, si verifichi esplicitamente che l'equazione $\rho(\theta) = \rho_0/(1 + e\cos(\theta - \theta_0))$ descrive una conica con uno dei fuochi centrato nell'origine, i.e., si verifichi che:

1. per $e = 1$, $\rho = \rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti equidistante dall'origine e da una retta non passante per l'origine detta direttrice (parabola);

2. per $e > 1$, $\rho = \rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti la cui differenza delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (iperbole).

Soluzione: Vedi la soluzione al problema 3 del Tutorato 8 [29/11/2012] dell'A.A. 2012-13.