Foglio di esercizi - 6 aprile 2026
Corso di FM310

1. Risolvere l'equazione del trasporto lineare omogenea

$$\begin{cases} x\partial_t u(x,t) - t\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos x \end{cases}$$

2. Risolvere l'equazione del trasporto lineare non omogenea:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (x^2-1)\partial_x u(x,t) = -u(x,t) \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

[**Suggerimento:** Sia $u(x,t)$ soluzione. Si ponga $z(t) := u(\varphi_t(x_0), t)$, dove $\varphi_t(x_0)$ è la soluzione di $\dot{x}(t) = x^2 - 1$ con dato iniziale $x(0) = x_0$. Si riconosca che $z(t)$ soddisfa $\dot{z}(t) = -z(t)$: si usi questa osservazione per determinare $z(t)$ e, di conseguenza, $u(x,t)$.]

3. Risolvere l'equazione delle onde non omogenea su $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - 4\partial_x^2 u(x,t) = x(2\pi - x)^2 t \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 \end{cases}$$

con condizioni al bordo miste (Dirichlet a sinistra e Neumann a destra): $u(0,t) = 0$ e $\partial_x u(2\pi, t) = 0$.

4. Risolvere l'equazione delle onde omogenea su $[0, L]$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = h(1 - \frac{|2x-L|}{L}) \\ \partial_t u(x,0) = 0 \end{cases}$$

con condizioni al bordo di Dirichlet: $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Si discuta se la soluzione trovata è soluzione classica o soluzione debole nel senso delle distribuzioni.