Primo esonero - 24 aprile 2026
Corso di FM310

1. Risolvere l'equazione del trasporto lineare omogenea

$$\begin{cases} e^x \partial_t u(x,t) + (e^x - 1)\partial_x u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Disegnarne schematicamente nel piano (x,t) le curve caratteristiche.

2. Risolvere l'equazione delle onde omogenea bidimensionale su $\Omega := (0, L_1) \times (0, L_2)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) = 0, \\ u(\mathbf{x},0) = (x_1^2 - L_1 x_1)\sin^2(\pi x_2/L_2), \qquad \partial_t u(\mathbf{x},0) = 0, \end{cases}$$

valida per $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$, con condizioni al bordo di Dirichlet: $u(\mathbf{x},t) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Si discuta se tale soluzione è classica o debole nel senso delle distribuzioni.

3. Risolvere l'equazione delle onde non omogenea su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - 4\partial_x^2 u(x,t) = x + x^3 \\ u(x,0) = \sin x, \qquad \partial_t u(x,0) = \cos x. \end{cases}$$

4. [Facoltativo] Si consideri la distribuzione regolare J_F associata alla funzione $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, dove $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si calcoli la derivata di J_F.