

Corso di laurea in Matematica
SAPIENZA Università di Roma



Note del corso di Fisica Matematica

PAOLO BUTTÀ

Dipartimento di Matematica
"Guido Castelnuovo"
SAPIENZA Università di Roma

Indice

Capitolo 1. Aspetti generali	1
1.1. Introduzione	1
1.2. Equazioni alle derivate parziali	2
1.3. Un esempio: la diffusione lineare	3
1.4. Equazioni della fisica matematica	6
Capitolo 2. Trasporto lineare ed equazione di Liouville	9
2.1. Preliminari	9
2.2. Equazione del trasporto lineare	10
2.3. Equazione di Liouville	12
2.4. Teorema di Liouville	14
Capitolo 3. Equazione della corda vibrante: metodo di D'Alembert	17
3.1. Considerazioni generali	17
3.2. Equazione della corda vibrante: derivazione	19
3.3. Problemi ben posti e metodo dell'energia	29
3.4. La soluzione di D'Alembert	33
3.5. La soluzione fondamentale	38
3.6. Equazione non omogenea: formula di Duhamel	40
3.7. Simmetrie e metodo delle riflessioni	43
3.8. Soluzione di alcuni esercizi	46
Capitolo 4. Equazione della corda vibrante: metodo di Fourier	49
4.1. Serie di Fourier	49
4.2. Il metodo di Fourier	55
4.3. Esempi di applicazione del metodo di Fourier	61
4.4. Soluzione di alcuni esercizi	68
Capitolo 5. Introduzione alla teoria delle distribuzioni	75
5.1. Premessa	75
5.2. Spazio delle funzioni fondamentali	75
5.3. Spazio delle distribuzioni	77
5.4. Esempi	78
5.5. Operazioni sulle distribuzioni	83
5.6. Funzione di Green come soluzione in senso generalizzato	86
5.7. Soluzione di alcuni esercizi	88
Capitolo 6. Trasformata di Fourier	91

6.1. Derivazione euristica	91
6.2. Proprietà elementari	92
6.3. Formula di inversione	94
6.4. Derivazione e convoluzione	98
6.5. Trasformata di Fourier in dimensione n	100
Capitolo 7. Spazio di Schwartz e distribuzioni temperate	101
7.1. Premessa	101
7.2. Spazio delle funzioni a decrescenza rapida	101
7.3. Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	103
7.4. Distribuzioni temperate	105
7.5. Esempi	106
7.6. Operazioni sulle distribuzioni temperate	107
7.7. Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	108
7.8. Calcolo delle soluzioni fondamentali con la trasformata di Fourier	110
Capitolo 8. Equazione delle onde in dimensione $d > 1$	113
8.1. Problemi ben posti e questioni di unicità	113
8.2. Separazione delle variabili per problemi in domini limitati	117
8.3. Soluzione fondamentale dell'equazione delle onde in $d = 3$	119
8.4. Formula di Kirchhoff	123
8.5. Formula di Poisson	126
8.6. Potenziali ritardati	128
8.7. Sulla velocità di propagazione	129
8.8. Soluzione di alcuni esercizi	132
Capitolo 9. Equazioni di Laplace e Poisson	137
9.1. Considerazioni generali	137
9.2. Analisi del problema unidimensionale	138
9.3. Approccio al problema in dimensione maggiore di uno	141
9.4. Soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace in $d = 2, 3$	142
9.5. Formule di Green	147
9.6. Funzioni armoniche	149
9.7. Separazione delle variabili	154
9.8. Formula integrale di Poisson	160
9.9. Equazione di Poisson in domini limitati	163
9.10. Equazione di Poisson in $\mathbb{R}^3$	166
9.11. Equazione di Poisson in $\mathbb{R}^2$	172
9.12. Formulazione variazionale del problema di Laplace-Dirichlet	173
9.13. Soluzione di alcuni esercizi	174
Capitolo 10. Equazione del calore	181
10.1. Considerazioni generali	181
10.2. Derivazione euristica	181
10.3. Problemi ben posti e principio del massimo	183
10.4. Soluzione fondamentale	190

10.5. Problema di Cauchy globale	192
10.6. Risoluzione di problemi con il metodo delle riflessioni	196
10.7. Risoluzione di problemi con il metodo di Fourier	199
10.8. Derivazione microscopica dell'equazione del calore	202
10.9. Soluzione di alcuni esercizi	206
Bibliografia	209

CAPITOLO 1

Aspetti generali

1.1. Introduzione

La Matematica rappresenta uno strumento essenziale nella comprensione del mondo reale, attraverso la costruzione di *modelli matematici* che permettono di fare descrizioni e previsioni sui fenomeni di interesse. In generale, un modello matematico si basa su *leggi generali* (quali, ad esempio, la seconda legge della dinamica) e su *leggi costitutive* specifiche del sistema in esame (ad esempio la legge di Hooke sulle forze elastiche).

Nella costruzione di un modello matematico occorre innanzitutto stabilire il numero di parametri reali indipendenti necessari per descrivere lo stato del sistema. Dopodiché, le leggi generali e le relazioni costitutive potranno essere codificate in equazioni che legano tra loro questi parametri.

Alcuni fenomeni fisici richiedono un numero finito di tali parametri. L'esempio principe è fornito dalla meccanica newtoniana, che descrive il moto di corpi pesanti, di dimensione trascurabile rispetto alle osservazioni, in termini di punti materiali liberi di muoversi nello spazio. In questo caso i parametri necessari ad individuare lo stato del sistema sono naturalmente forniti dall'insieme delle posizioni e velocità dei punti materiali. Inoltre, l'evoluzione di questi punti è governata dalle leggi della dinamica che, per assegnate leggi di forza (ad esempio la legge di gravità), si traducono in un sistema di equazioni differenziali ordinarie. In effetti, come nel caso newtoniano appena descritto, molti altri modelli di interesse si scrivono in termini di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Esiste ora una vasta classe di fenomeni la cui descrizione richiede un numero infinito di parametri reali indipendenti. Un esempio importante è costituito dai modelli della fisica dei mezzi continui, in cui si vuole descrivere il comportamento macroscopico della materia, rinunciando al dettaglio microscopico ed atomico della stessa.

Consideriamo, ad esempio, una mole di gas, costituita da $N \sim 10^{23}$ molecole. È inutile ed impossibile seguire il moto delle singole molecole, nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{6N}$ di tutte le posizioni e velocità. Viceversa, per una descrizione macroscopica del gas, sotto opportune condizioni (gas ideale) possono essere sufficienti poche grandezze macroscopiche, precisamente la densità $\rho(x, t) \in \mathbb{R}_+$, la velocità $\mathbf{v}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ e la temperatura $T(x, t) \in \mathbb{R}_+$ di un “volumetto” dx di gas

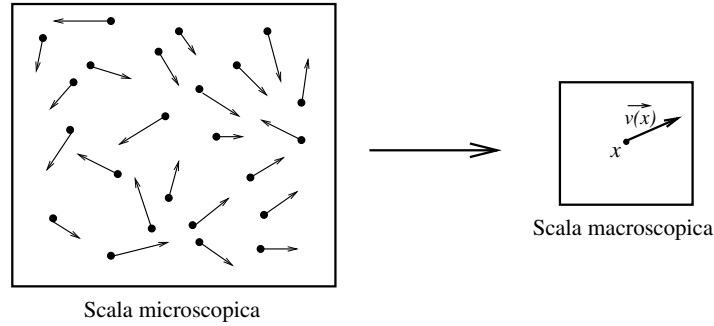


FIGURA 1.1. Un gas ($N \sim 10^{23}$ punti materiali)

centrato in $x \in \mathbb{R}^3$ e valutate al tempo t . Si presti attenzione che x sono coordinate macroscopiche, nel senso che il volumetto dx è estremamente piccolo in tali unità di misura ma ciononostante esso contiene moltissime molecole.

In effetti, sotto opportune ipotesi sullo stato del sistema e sul tipo di misurazioni che si vogliono eseguire, questa descrizione “ridotta” è possibile, nel senso che queste grandezze sono ben definite (ovvero misurabili) ed i loro valori predicibili attraverso la soluzione di opportune equazioni (chiuse nelle incognite $\rho, \mathbf{v}, T$), che completano la definizione stessa del modello.

Più in generale, la *meccanica dei mezzi continui* studia modelli fenomenologici (i *corpi continui*) adatti a descrivere solidi (non rigidi) o fluidi nei casi in cui le scale dei fenomeni osservati siano così grandi da poter trascurare la struttura molecolare della materia. Le incognite di queste descrizioni ridotte sono costituite da una o più funzioni scalari $u(x, t)$ (spesso dette *campi*). Nell’esempio precedente, abbiamo cinque campi scalari: la densità $\rho(x, t)$, le tre componenti del campo di velocità $\mathbf{v}(x, t)$ e la temperatura $T(x, t)$. Trattasi quindi di sistemi con un numero infinito di gradi di libertà (i valori $u(x, t)$ dei campi u al tempo $t \in \mathbb{R}$ in ciascun punto $x \in \mathbb{R}^3$ dello spazio).

Anche al di fuori della meccanica dei mezzi continui, vi sono molti fenomeni che richiedono direttamente una descrizione in termini di campi. Ad esempio la teoria dell’elettromagnetismo, in cui le grandezze fisiche osservabili sono il campo elettrico $\mathbf{E}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ ed il campo magnetico $\mathbf{B}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ (dunque sei campi scalari). Oppure la meccanica quantistica, in cui le leggi del moto sono scritte in termini di un particolare campo complesso $\Psi(x, t) \in \mathbb{C}$, detto *funzione d’onda*.

Avviene ora che la maggior parte delle leggi generali o fenomenologiche si esprimano attraverso *equazioni alle derivate parziali* (EDP) che devono essere soddisfatte dalle funzioni incognite.

1.2. Equazioni alle derivate parziali

Diamo alcune definizioni di base sulle EDP, supponendo per brevità che vi sia un’unica funzione incognita $u(y)$ delle variabili indipendenti $y = (y_1, \dots, y_n) \in$

$\mathcal{D}$, con $\mathcal{D}$ dominio aperto di $\mathbb{R}^n$. Una EDP per u di grado $k \in \mathbb{N}$ è un'equazione della forma

$$\Phi(y, u(y), Du(y), \dots, D^{k-1}u(y), D^k u(y)) = 0 \quad (y \in \mathcal{D}), \quad (1.1)$$

dove

$$\Phi: \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione assegnata e, per ogni $p \in \mathbb{N}$, $D^p u(y)$ indica l'insieme di tutte le derivate parziali di ordine p della funzione u nel punto y . In particolare, identifichiamo Du con il gradiente trasposto $(\nabla u)^T$ e $D^2 u$ con la matrice hessiana, ovvero

$$Du(y) = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}(y) \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial y_n}(y) \right), \quad D^2 u(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}(y) & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_n}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y_n \partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}(y) \end{pmatrix}.$$

L'equazione (1.1) è detta *lineare* se Φ è una funzione lineare di u e di tutte le sue derivate. È invece detta *semilineare* se Φ è una funzione lineare delle derivate di ordine k con coefficienti che dipendono unicamente dalla variabile indipendente y . È infine detta *quasilineare* se Φ è una funzione lineare delle derivate di ordine k con coefficienti che possono però dipendere anche da u e dalle sue derivate di ordine più basso.

Analogamente al problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie, possiamo chiederci sotto quali condizioni esiste ed è unica la soluzione $u(y)$ di una EDP. È ragionevole supporre che occorra dire qualcosa sul valore di u e delle sue derivate di ordine più basso sulla frontiera $\partial\mathcal{D}$ del dominio $\mathcal{D}$, ovvero fissare le *condizioni (o dati) al bordo* del problema. L'equazione (1.1) con assegnate condizioni al bordo sarà un *problema ben posto* se si ha esistenza, unicità ed una qualche dipendenza continua dai dati al bordo della soluzione.

Ricordiamo che, tranne che nel caso $k = 1$ e nel caso delle equazioni lineari, non esiste una teoria generale consolidata delle EDP come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie (l'analogo dei teoremi generali di esistenza ed unicità). Sono state invece largamente studiate e comprese specifiche equazioni di particolare importanza in matematica o altre discipline.

1.3. Un esempio: la diffusione lineare

Abbiamo già osservato che un modello matematico si ottiene combinando leggi generali con leggi costitutive specifiche del particolare sistema che si vuole descrivere.

In meccanica dei mezzi continui, le leggi generali sono ad esempio le equazioni di bilancio, quali la conservazione di massa, energia, quantità di moto, mentre le leggi costitutive sono le proprietà che differenziano una classe di corpi continui da un'altra (per esempio la legge di Hooke per i solidi elastico-lineari, la

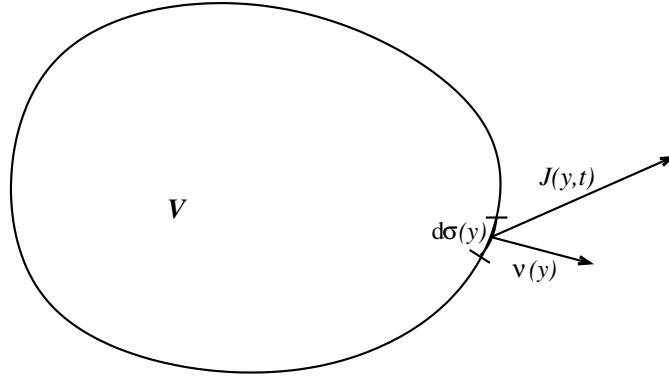


FIGURA 1.2. La materia che attraversa l'elemento di superficie $d\sigma(y)$ nell'unità di tempo è pari a $d\sigma(y) J(y, t) \cdot v(y)$.

legge di Fourier sulla propagazione del calore, la condizione di incompressibilità di alcuni fluidi, ecc.)

Discutiamo in dettaglio l'importante esempio della *diffusione lineare*. Supponiamo che $c(x, t)$ sia una funzione non negativa ed integrabile, che interpretiamo come la concentrazione di una sostanza distribuita nello spazio $\mathbb{R}^d$ al tempo t . Supponiamo che

- (i) la sostanza non viene creata o distrutta ma semplicemente trasportata;
- (ii) esiste una funzione vettoriale $J(x, t)$, detta *corrente*, tale che il suo flusso sia pari al tasso istantaneo di massa che attraversa l'unità di superficie.

Quindi, per una qualsiasi regione limitata V con frontiera regolare ∂V , il bilancio sulla variazione di massa della sostanza ivi contenuta si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_V dx c(x, t) = - \int_{\partial V} d\sigma(y) J(y, t) \cdot v(y),$$

essendo $d\sigma(y)$ la misura di superficie e $v(y)$ la normale a ∂V in y diretta esternamente a V , vedi Figura 1.2. Ma

$$\frac{d}{dt} \int_V dx c(x, t) = \int_V dx \frac{\partial c}{\partial t}(x, t)$$

e, per il teorema della divergenza,

$$\int_{\partial V} d\sigma(y) J(y, t) \cdot v(y) = \int_V dx \operatorname{div} J(x, t),$$

dove la divergenza di un campo vettoriale $V(x) \in \mathbb{R}^d$ scritta in coordinate cartesiane ha la forma

$$\operatorname{div} V(x) = \nabla \cdot V(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x).$$

Pertanto

$$\int_V dx \left[\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} J(x, t) \right] = 0.$$

Vista l'arbitrarietà nella scelta di V deduciamo che $c(x, t)$ deve soddisfare la seguente equazione, detta *equazione di continuità*,

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} J(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

L'equazione di continuità è una legge generale (stabilisce la conservazione di una grandezza fisica), che deve ora essere accompagnata da una qualche relazione costitutiva, propria del sistema specifico in esame, che permetta di legare la funzione di corrente J alla concentrazione c della grandezza. Consideriamo qui il caso della *diffusione*, ovvero supponiamo che

(i) il trasporto di massa avviene attraverso la dispersione della sostanza in un mezzo (un gas in un altro gas, un soluto in un solvente, ecc.);

(ii) tale dispersione è causata dalle interazioni disordinate con le molecole componenti il mezzo (quindi senza direzioni privilegiate).

In particolare, la sostanza diffonde dalle zone a concentrazione maggiore verso le zone circostanti a concentrazione minore. La più semplice scelta per la corrente consistente con tale comportamento è quella dettata dalla *legge di Fick*:¹

$$J(x, t) = -D\nabla c(x, t), \quad (1.3)$$

dove D è una costante positiva e ∇ è il gradiente (rispetto alle variabili spaziali $x \in \mathbb{R}^d$). Inserendo la legge di Fick nell'equazione di continuità troviamo

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(-D\nabla c(x, t)) = 0.$$

Ma $\operatorname{div}(-D\nabla c(x, t)) = -D\operatorname{div}(\nabla c(x, t)) = -D\Delta c(x, t)$, dove $\Delta := \operatorname{div}\nabla$ è l'operatore di Laplace (o *laplaciano*) in dimensione d , che in coordinate cartesiane si scrive, per ogni $U = U(x)$ funzione numerica regolare,

$$\Delta U(x) = \operatorname{div}\nabla U(x) = \nabla \cdot \nabla U(x) = \operatorname{Tr} D^2 U(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}(x). \quad (1.4)$$

Dunque $c(x, t)$ soddisfa la *legge di diffusione*

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = D\Delta c(x, t),$$

che è un'*equazione alle derivate parziali* nella funzione incognita $c(x, t)$. Tale equazione è nota anche come *equazione del calore*, poiché fu introdotta per la prima volta nella descrizione della propagazione del calore in un mezzo solido, isotropo ed omogeneo.

¹Si osservi che la legge di Fick prevede una dipendenza lineare della corrente dal gradiente di concentrazione. È ragionevole attendersi che questa sia una buona approssimazione nel caso di gradienti piccoli, ovvero che la legge di diffusione lineare sia adeguata a descrivere fenomeni in cui le variazioni di concentrazione nello spazio non siano troppo grandi.

1.4. Equazioni della fisica matematica

In queste note studieremo alcune equazioni fondamentali della fisica matematica e certe generalizzazioni di queste. Precisamente, le equazioni fondamentali che analizzeremo sono

- (1) l'equazione del trasporto lineare,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot F(x, t) = 0;$$

- (2) l'equazione di Liouville,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}[\rho(x, t)F(x, t)] = 0;$$

- (3) l'equazione delle onde,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t);$$

- (4) le equazioni di Laplace,

$$\Delta u(x) = 0$$

e di Poisson,

$$\Delta u(x) + f(x) = 0;$$

- (5) l'equazione del calore (o della diffusione),

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \Delta u(x, t);$$

dove $f(x) \in \mathbb{R}$, $F(x, t) \in \mathbb{R}^d$ sono funzioni assegnate delle variabili spaziali $x = (x_1, \dots, x_d)$ e della variabile temporale t , i parametri c, D sono positivi, il gradiente ∇ ed il laplaciano Δ sono relativi alle variabili spaziali x . Nei casi (3), (4) e (5) considereremo solo i casi di dimensione spaziale $d = 1, 2, 3$. Tra le generalizzazioni, studieremo in particolare le versioni non omogenee delle equazioni d'onda e diffusione,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) + f(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \Delta u(x, t) + f(x, t),$$

dove $f(x, t) \in \mathbb{R}$.

Tutte queste equazioni condividono tra loro due caratteristiche importanti: sono lineari e di ordine non superiore al secondo (precisamente sono del secondo ordine tranne le prime due che sono del prim'ordine).

Ricordiamo brevemente alcuni fatti generali sulle equazioni lineari del secondo ordine, la cui forma più generale è

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}(y) + \sum_{i=1}^n B_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) + C(y)u(y) + f(y) = 0 \quad (y \in \mathcal{D}), \quad (1.5)$$

con $A(y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(y) \in \mathbb{R}^n$ e $C(y), f(y) \in \mathbb{R}$ funzioni assegnate di $y \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

L'equazione è detta *omogenea* se $f(y) = 0$. Poiché siamo interessati a soluzioni regolari $u \in C^2(\mathcal{D})$, l'ordine di derivazione è ininfluente, quindi

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}(y) = \sum_{i,j=1}^n \frac{A_{i,j}(y) + A_{j,i}(y)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}(y),$$

cosicché, senza perdita di generalità, possiamo assumere $A(y) = A(y)^T$, ovvero $A(y)$ una matrice simmetrica. Questo significa che $A(y)$ ha autovalori reali per ciascun $y \in \mathcal{D}$. Siano $n_0(y)$, $n_+(y)$, $n_-(y)$ il numero di autovalori rispettivamente nulli, positivi, negativi di $A(y)$ (ciascuno contato con la propria molteplicità). Ciò premesso, l'equazione viene detta

- ellittica (nel punto y) se $n_+(y) = n$ oppure $n_-(y) = n$;
- iperbolica (nel punto y) se $n_0(y) = 0$ e $n_+(y) - n_-(y) \neq \pm n$;
- parabolica (nel punto y) se $n_0(y) > 0$.

Posto $y = (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$ si vede immediatamente con questa notazione che le equazioni delle onde, di Laplace, di Poisson e del calore hanno matrice A diagonale ed indipendente da y . In particolare

(1) L'equazione delle onde è iperbolica: $y = (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $A(y) = \begin{pmatrix} -c^2 \mathbb{I}_d & \mathbf{0}_d \\ \mathbf{0}_d^T & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Le equazioni di Laplace/Poisson sono ellittiche: $y = x \in \mathbb{R}^d$, $A(y) = \mathbb{I}_d$.

(3) L'equazione del calore è parabolica: $y = (x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $A(y) = \begin{pmatrix} -D \mathbb{I}_d & \mathbf{0}_d \\ \mathbf{0}_d^T & 0 \end{pmatrix}$.

(dove $\mathbb{I}_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ è la matrice identità, $\mathbf{0}_d$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^d$).

Concludiamo ricordando una proprietà fondamentale delle EDP lineari, il cosiddetto *principio di sovrapposizione*, che è una proprietà basilare nelle diverse strategie di risoluzione delle equazioni lineari. Enunciamo tale proprietà nel caso delle equazioni del secondo ordine (1.5), che riscriviamo nelle due forme

$$Lu = 0 \text{ (equazione omogenea), } Lu + f = 0 \text{ (equazione non omogenea),}$$

con L l'operatore differenziale lineare

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n B_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} + C(y).$$

Immediata conseguenza delle ovvie relazioni

$$L(u + v) = Lu + Lv, \quad L(cu) = cLu, \quad \forall u, v \in C^2(\mathcal{D}) \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

è il preannunciato principio:

TEOREMA 1.1 (Principio di sovrapposizione). *Se $u_1(y), u_2(y)$ sono soluzioni dell'equazione non omogenea con termini noti $f_1(y), f_2(y)$, ogni combinazione lineare $u(y) = c_1 u_1(y) + c_2 u_2(y)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione non omogenea con termine noto $f(y) = c_1 f_1(y) + c_2 f_2(y)$. In particolare, combinazioni lineari di soluzioni dell'equazione omogenea sono anch'esse soluzioni dell'equazione omogenea.*

CAPITOLO 2

Trasporto lineare ed equazione di Liouville

2.1. Preliminari

Ricordiamo alcuni fatti dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Sia $F \in C^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ una funzione vettoriale regolare ($k \geq 1$) tale che il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), t), \\ x(t_0) = x, \end{cases} \quad (2.1)$$

ammetta soluzione globale nel tempo per ogni dato iniziale $(x, t_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Nel seguito indicheremo con $\Phi(x, t_0, t) = \Phi^{t, t_0}(x)$ la soluzione del problema (2.1). La famiglia di trasformazioni $\{\Phi^{t, t_0}\}$ definisce una *famiglia a due parametri di diffeomorfismi* (di classe C^k) di $\mathbb{R}^d$ in sé, ovvero gode delle seguenti proprietà:

- $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$;
- $\Phi^{t, t_0} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ è un diffeomorfismo C^k per ogni $t_0, t \in \mathbb{R}$;
- $\Phi^{t, t_0} = \Phi^{t, s} \circ \Phi^{s, t_0}$, $\Phi^{t_0, t_0} = \text{Id}$ $\forall t_0, s, t \in \mathbb{R}$.

Tali proprietà seguono dai teoremi di esistenza, unicità e regolarità rispetto ai dati iniziali del problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Inoltre, dalla ovvia relazione $\Phi^{t, t_0} \circ \Phi^{t_0, t} = \Phi^{t_0, t} \circ \Phi^{t, t_0} = \text{Id}$ e dalla regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$(\Phi^{t, t_0})^{-1} = \Phi^{t_0, t}, \quad (D\Phi^{t, t_0}(x))^{-1} = D\Phi^{t_0, t}(\Phi^{t, t_0}(x)) \quad \forall t_0, t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.2)$$

dove $D\Phi^{t, t_0}(x)$ è la matrice jacobiana della trasformazione,

$$[D\Phi^{t, t_0}(x)]_{i,j} = \frac{\partial \Phi_i^{t, t_0}}{\partial x_j}(x).$$

Osserviamo infine che nel caso particolare di sistemi autonomi, in cui cioè la funzione $F = F(x)$ non dipende esplicitamente dal tempo, traslazioni temporali di soluzioni sono ancora soluzioni. In particolare, posto $\Phi^t(x) := \Phi^{t, 0}(x)$ si ha $\Phi^{t, t_0}(x) = \Phi^{t-t_0}(x)$. La famiglia $\{\Phi^t\}$ forma ora un *gruppo ad un parametro di diffeomorfismi* di $\mathbb{R}^d$ in sé, ovvero

- $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$;
- $\Phi^t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ è un diffeomorfismo C^k per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$, $\Phi^0 = \text{Id}$.

La funzione vettoriale $F(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi^t(x) \right|_{t=0}$ è detta *generatore* del gruppo.

2.2. Equazione del trasporto lineare

Come già osservato in Sezione 1.1, si scrivono in termini di sistemi differenziali del tipo (2.1) molti modelli di evoluzione di sistemi fisici con un numero finito di gradi di libertà, nel qual caso i punti dello spazio delle fasi $\mathbb{R}^d$ descrivono i possibili stati del sistema.

Una funzione reale u su $\mathbb{R}^d$, eventualmente dipendente dal tempo, dunque $u = u(x, t)$, rappresenta allora il valore di una grandezza (o *osservabile*) del sistema quando quest'ultimo si trova nella configurazione x al tempo t . La sua evoluzione nel tempo lungo il moto di dato iniziale (x_0, t_0) è pertanto fornita dalla funzione composta $u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t)$. Diremo che $u(x, t)$ è un *integrale primo* del sistema (2.1) se

$$u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) = u(x_0, t_0) \quad \forall (x_0, t_0, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

TEOREMA 2.1. *La funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ è integrale primo del sistema (2.1) se e solo se è soluzione della seguente equazione alle derivate parziali del primo ordine,*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot F(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

dove $\nabla u(x, t)$ è il gradiente rispetto alle coordinate cartesiane x della funzione u ($U \cdot V$ denota il prodotto scalare standard tra i vettori $U, V \in \mathbb{R}^d$).

DIMOSTRAZIONE. Poiché $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ la condizione di integrale primo è equivalente a richiedere che

$$\frac{d}{dt} u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) = 0 \quad \forall (x_0, t_0, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Si ha ora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) + \nabla u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) \cdot \frac{d}{dt} \Phi^{t, t_0}(x_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) + \nabla u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) \cdot F(\Phi^{t, t_0}(x_0), t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Supponiamo che u sia soluzione dell'equazione (2.3). Valutandola nel punto $(x, t) = (\Phi^{t, t_0}(x_0), t)$ deduciamo dalla (2.4) che u è integrale primo. Viceversa, se u è integrale primo, sempre dalla (2.4) segue che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) + \nabla u(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) \cdot F(\Phi^{t, t_0}(x_0), t) = 0 \quad \forall (x_0, t_0, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Valutando quest'ultima equazione per $t = t_0$, ricordando che $\Phi^{t_0, t_0}(x_0) = x_0$ ed essendo (x_0, t_0) arbitrari, deduciamo che u è soluzione dell'equazione (2.3). $\square$

Un'equazione della forma (2.3) viene detta *equazione del trasporto lineare* (non consideriamo qui il caso più generale del trasporto non lineare, in cui $F = F(x, t, u)$). La traiettoria $\Phi^{t, t_0}(x_0)$ è detta *curva caratteristica* (o semplicemente *caratteristica*) uscente da (x_0, t_0) dell'equazione. Dal teorema precedente

segue che ogni soluzione u è tale che $u(\Phi^{t,t_0}(x_0), t) = u(x_0, t_0)$, ovvero ogni soluzione è costante lungo le caratteristiche. In particolare, la soluzione del relativo problema di Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot F(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ u(x, t_0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.5)$$

con $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ è data da $u(x, t) = u_0(\Phi^{t_0,t}(x))$, ovvero la soluzione in x al tempo t si ottiene “trasportando” il dato iniziale lungo la caratteristica uscente da (x_0, t_0) , dove $x_0 = \Phi^{t_0,t}(x)$.

Notiamo infine che anche il problema di Cauchy non omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot F(x, t) = f(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \\ u(x, t_0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.6)$$

con $f \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ assegnata, si risolve in termini delle caratteristiche. Infatti, se $u(x, t)$ è soluzione di (2.6) la funzione $z(s) = u(\Phi^{s,t}(x), s)$ ha derivata

$$\dot{z}(s) = \frac{\partial u}{\partial s}(\Phi^{s,t}(x), s) + \nabla u(\Phi^{s,t}(x), s) \cdot F(\Phi^{s,t}(x), s) = f(\Phi^{s,t}(x), s).$$

Pertanto

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t ds f(\Phi^{s,t}(x), s).$$

Ma $z(t) - z(t_0) = u(x, t) - u_0(\Phi^{t_0,t}(x))$ e dunque la soluzione del problema (2.6) si scrive

$$u(x, t) = u_0(\Phi^{t_0,t}(x)) + \int_{t_0}^t ds f(\Phi^{s,t}(x), s), \quad (2.7)$$

ovvero (per la linearità dell'equazione) pari alla somma tra la soluzione dell'equazione omogenea associata (2.5) di uguale dato iniziale e la soluzione particolare della (2.6) di dato iniziale nullo.

OSSERVAZIONE 2.1. Nel caso autonomo (ovvero con $F = F(x)$ e $f = f(x)$ indipendenti dal tempo) la soluzione (2.7) si scrive $u(x, t) = \tilde{u}(x, t - t_0)$, con

$$\tilde{u}(x, t) = u_0(\Phi^{-t}(x)) + \int_0^t ds f(\Phi^{s-t}(x)), \quad (2.8)$$

dove $\Phi^t(x)$ è il flusso di fase generato da $F(x)$. (Verificare!)

ESEMPIO 2.1. Consideriamo il caso più semplice di un'equazione del trasporto lineare omogenea con coefficienti costanti, dunque $F(x) = c \in \mathbb{R}^d$. Per l'Osservazione 2.1 senza perdere di generalità possiamo assumere $t_0 = 0$. Le caratteristiche sono quindi le funzioni lineari $\Phi^{t,t_0}(x) = x + ct$ cosicché la soluzione dell'equazione del trasporto di dato iniziale u_0 prende la semplicissima forma $u(x, t) = u_0(x - ct)$. Altrimenti detto, la soluzione al tempo t si ottiene “traslando rigidamente” il dato iniziale di $|ct|$ nella direzione e verso del vettore c . La soluzione $u(x, t) = u_0(x - ct)$ è quindi un'onda viaggiante che si muove nello spazio

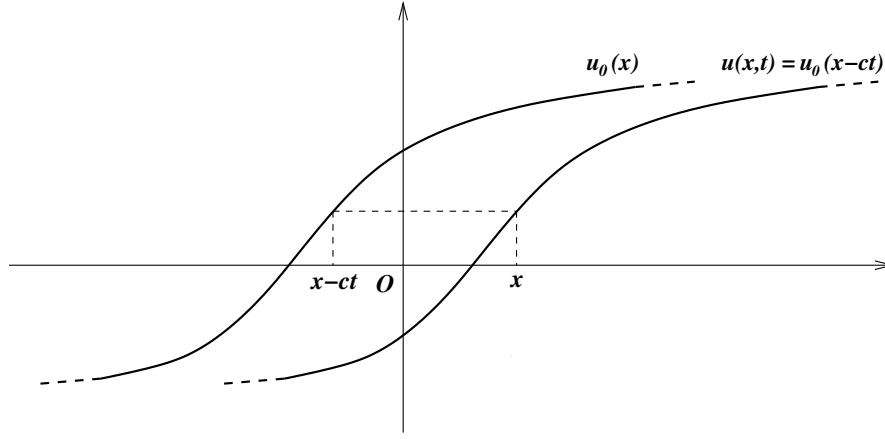


FIGURA 2.1. Esempio di onda viaggiante diretta ($c > 0$) al tempo $t > 0$: il grafico dell'evolva $u(x, t)$ al tempo t del profilo iniziale $u_0(x)$ si ottiene traslando di ct verso destra il grafico di u_0 .

con *velocità di propagazione* c . Nel caso unidimensionale in cui $x, c \in \mathbb{R}$, la funzione $u_0(x - ct)$ è detta *onda viaggiante diretta* se $c > 0$ ovvero *onda viaggiante inversa* se $c < 0$, vedi Figura 2.1.

2.3. Equazione di Liouville

Supponiamo assegnata una funzione non negativa ed integrabile $\rho(x, t)$, che interpretiamo come la densità di massa con la quale una sostanza (ad esempio un fluido) è distribuita nello spazio $\mathbb{R}^d$ al tempo t . Come nel caso della diffusione lineare discussa in Sezione 1.3, supponiamo che tale sostanza non venga creata o distrutta ma semplicemente trasportata e sia $J(x, t)$ la corrente associata a tale trasporto. Dunque la densità ρ e la corrente J sono legate tra loro attraverso l'equazione di continuità (1.2), ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} J(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}.$$

Quale relazione costitutiva, propria del sistema specifico in esame, supponiamo ora che il trasporto di massa avvenga mediante la famiglia di diffeomorfismi Φ^{t, t_0} generati dal sistema differenziale (2.1). In questo caso, poiché la massa $\rho(x, t) dx$ contenuta nel volumetto dx attorno a x si muove al tempo t con velocità

$$v(x, t) = \left. \frac{d}{ds} \Phi^{s, t}(x) \right|_{s=t} = F(x, t),$$

abbiamo $J(x, t) = \rho(x, t)F(x, t)$. Perveniamo pertanto all'*equazione di Liouville*,¹

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} [\rho(x, t)F(x, t)] = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

¹Si osservi come, rispetto al caso della legge di Fick discussa in Sezione 1.3, si perviene in questo caso ad un'equazione del prim'ordine.

Vogliamo ora mostrare che la soluzione del relativo problema di Cauchy può essere espressa mediante le caratteristiche. Osserviamo a tal fine che la massa contenuta nella regione limitata V_{t_0} di $\mathbb{R}^d$ al tempo t_0 deve essere uguale a quella contenuta nella regione V_t , evoluta al tempo t di V_{t_0} , ovvero $V_t := \Phi^{t, t_0}(V_{t_0}) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = \Phi^{t, t_0}(x_0), x_0 \in V_{t_0}\}$. Pertanto, posto $\rho(x, t) = \rho_0(x)$ e detta $M_t(V)$ la massa contenuta al tempo t in un generico dominio V , deve aversi

$$M_t(V_t) = M_{t_0}(V_{t_0}) \quad \forall V_{t_0} \subset \subset \mathbb{R}^d.$$

D'altra parte, mediante il cambiamento di coordinate $x_0 = \Phi^{t_0, t}(x)$, si ha

$$M_{t_0}(V_{t_0}) = \int_{V_t} dx \rho_0(\Phi^{t_0, t}(x)) |\det D\Phi^{t_0, t}(x)|,$$

dove $D\Phi^{t_0, t}(x)$ è la matrice jacobiana della trasformazione. Se scegliamo ora $V_{t_0} = \Phi^{t_0, t}(V)$ con V una qualsiasi regione limitata, dalle precedenti due equazioni otteniamo che

$$M_t(V) = \int_V dx \rho_0(\Phi^{t_0, t}(x)) |\det D\Phi^{t_0, t}(x)| \quad \forall V \subset \subset \mathbb{R}^d.$$

Per l'arbitrarietà nella scelta di V concludiamo che la densità è definita per tutti i tempi e vale esattamente

$$\rho(x, t) = \rho_0(\Phi^{t_0, t}(x)) |\det D\Phi^{t_0, t}(x)|. \quad (2.10)$$

Rimane da calcolare $\det D\Phi^{t_0, t}(x)$. Ricordiamo a tal fine che per il teorema di Liouville (che dimostriamo nella prossima sezione) il determinante jacobiano è soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{dt} \det D\Phi^{t, t_0}(x) = \operatorname{div} F(\Phi^{t, t_0}(x), t) \det D\Phi^{t, t_0}(x), \quad (2.11)$$

con $\det D\Phi^{t_0, t_0}(x) = 1$ essendo $\Phi^{t_0, t_0} = \operatorname{Id}$. Pertanto,

$$\det D\Phi^{t, t_0}(x) = \exp \left[\int_{t_0}^t ds \operatorname{div} F(\Phi^{s, t_0}(x), s) \right] \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nella (2.10) abbiamo infine

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho_0(\Phi^{t_0, t}(x)) \exp \left[\int_{t_0}^t ds \operatorname{div} F(\Phi^{s, t_0}(x), s) \right] \\ &= \rho_0(\Phi^{t_0, t}(x)) \exp \left[- \int_{t_0}^t ds \operatorname{div} F(\Phi^{s, t}(x), s) \right]. \end{aligned}$$

Un'ultima osservazione: essendo $\operatorname{div}(\rho F) = \nabla \rho \cdot F + \rho \operatorname{div} F$, se il campo F è solenoidale, ovvero $\operatorname{div} F(x, t) = 0$ per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, allora $\rho(x, t) = \rho_0(\Phi^{t_0, t}(x))$ e l'equazione di Liouville (2.9) coincide con quella del trasporto lineare (2.3). Questo non deve sorprendere, poiché in questo caso $\det D\Phi^{t, t_0}(x) = 1$, dunque il flusso conserva il volume, $|V_t| = |V_{t_0}|$, e pertanto il trasporto di massa si realizza mantenendo costante la densità lungo le caratteristiche.

OSSERVAZIONE 2.2. L'equazione di Liouville possiede anche la seguente interpretazione probabilistica. Supponiamo che $\Phi^{t, t_0}(x_0)$ rappresenti l'evoluzione

di un sistema fisico tale che il dato iniziale x_0 è noto con una qualche incertezza. Ad esempio, nel caso di un gas, è praticamente impossibile conoscere con precisione assoluta l'insieme delle posizioni e velocità di tutte le particelle ad un tempo iniziale t_0 . In molti casi è possibile modellare questa incertezza assumendo che lo stato iniziale sia una variabile aleatoria X_{t_0} , a valori in $\mathbb{R}^d$, la cui distribuzione di probabilità possieda una densità. Supponiamo quindi che esista una funzione integrabile $\rho_0 \geq 0$ con $\int dx_0 \rho_0(x_0) = 1$ tale che, per ogni insieme misurabile $V \subset \mathbb{R}^d$, l'evento $\{X_{t_0} \in V\}$ abbia probabilità

$$\mathbb{P}(X_{t_0} \in V) = \int_V dx_0 \rho_0(x_0).$$

Poiché l'evoluzione è deterministica, l'incertezza nella conoscenza dello stato del sistema al tempo t è ottenuta semplicemente "trasportando" lungo le soluzioni l'incertezza del dato iniziale. Altrimenti detto, la probabilità che il sistema si trovi al tempo t nell'insieme V è pari alla probabilità che esso si trovi al tempo t_0 nell'insieme $\Phi^{t_0,t}(V)$. Quindi lo stato del sistema al tempo t è anch'esso una variabile aleatoria, che indichiamo con X_t , tale che

$$\mathbb{P}(X_t \in V) = \mathbb{P}(X_{t_0} \in \Phi^{t_0,t}(V)),$$

da cui, ripetendo il ragionamento fatto in precedenza,

$$\mathbb{P}(X_t \in V) = \int_V dx \rho_0(\Phi^{t_0,t}(x)) |\det D\Phi^{t_0,t}(x)|.$$

Pertanto la variabile X_t possiede densità di probabilità pari alla soluzione $\rho(x, t)$ dell'equazione di Liouville di dato iniziale $\rho(\cdot, t_0) = \rho_0$.

2.4. Teorema di Liouville

Per calcolare la derivata temporale del determinante jacobiano osserviamo che, essendo il campo vettoriale $F(x, t)$ una funzione regolare,

$$\Phi^{t+\varepsilon,t}(x) = x + \varepsilon F(x, t) + R(x, t, \varepsilon),$$

con $R(x, t, \varepsilon)$, $\frac{\partial R}{\partial x}(x, t, \varepsilon)$ funzioni regolari ed infinitesime di ordine superiore al primo per $\varepsilon \rightarrow 0$. Quindi

$$D\Phi^{t+\varepsilon,t}(x) = \mathbb{I} + \varepsilon DF(x, t) + o(\varepsilon).$$

Notiamo ora che se $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ è una matrice assegnata, detti $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ gli autovalori di A , si ha

$$\det(\mathbb{I} + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^d (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^d \lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2),$$

da cui

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(\mathbb{I} + \varepsilon A) \right|_{\varepsilon=0} = \operatorname{Tr} A.$$

Osservando che $\operatorname{Tr} DF(x, t) = \operatorname{div} F(x, t)$ ne segue che

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \det D\Phi^{t+\varepsilon,t}(x) \right|_{\varepsilon=0} = \operatorname{div} F(x, t). \quad (2.12)$$

D'altra parte, per la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\begin{aligned}\det D\Phi^{t+\varepsilon, t_0}(x) &= \det D(\Phi^{t+\varepsilon, t} \circ \Phi^{t, t_0})(x) = \det [D\Phi^{t+\varepsilon, t}(\Phi^{t, t_0}(x)) D\Phi^{t, t_0}(x)] \\ &= \det D\Phi^{t+\varepsilon, t}(\Phi^{t, t_0}(x)) \det D\Phi^{t, t_0}(x),\end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \det D\Phi^{t, t_0}(x) &= \frac{d}{d\varepsilon} \det D\Phi^{t+\varepsilon, t_0}(x) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \det D\Phi^{t+\varepsilon, t}(\Phi^{t, t_0}(x)) \Big|_{\varepsilon=0} \det D\Phi^{t, t_0}(x) \\ &= \operatorname{div} F(\Phi^{t, t_0}(x), t) \det D\Phi^{t, t_0}(x),\end{aligned}$$

avendo applicato la (2.12) nell'ultimo passaggio. La relazione (2.11)   dunque dimostrata.

Equazione della corda vibrante: metodo di D'Alembert

3.1. Considerazioni generali

In questo capitolo iniziamo lo studio dell'equazione delle onde,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t),$$

per la funzione reale incognita $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, con $d = 1, 2, 3$ la dimensione spaziale, $c > 0$ una costante assegnata, Δ l'operatore di Laplace (1.4). Si perviene a tale equazione e sue generalizzazioni studiando diversi fenomeni fisici. Ad esempio, la propagazione del campo elettromagnetico nel vuoto, delle onde sonore in un mezzo, oppure le piccole vibrazioni di una corda, membrana o solido, attorno ad una posizione di equilibrio, sono governate da questa equazione.

In questo capitolo studiamo l'equazione delle onde nel caso unidimensionale $d = 1$ (detta anche equazione della corda vibrante), in cui essa assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Per prendere familiarità con le proprietà principali della propagazione ondosa, presentiamo da subito alcune soluzioni particolari. Notiamo che onde viaggianti dirette [risp. inverse] con velocità di propagazione c [risp. $-c$] sufficientemente regolari sono soluzioni dell'equazione (3.1). Più precisamente, funzioni del tipo $u_{\pm}(x, t) = u_0(x \mp ct)$ con $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$.

Tra le onde viaggianti hanno una particolare importanza le *onde armoniche*,

$$u_{\pm}(x, t) = A \cos(kx \mp \omega t + \varphi) \quad A > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

che rappresentano la propagazione del profilo iniziale $u_0(x) = A \cos(kx + \varphi)$ con velocità $c = \pm \omega/k$. Notiamo che sono funzioni periodiche di entrambe le variabili t e x , di periodi rispettivamente $T = 2\pi/\omega$ e $\lambda = 2\pi/k$. Il periodo spaziale λ è detto *lunghezza d'onda* e rappresenta la distanza tra due creste successive. Il parametro A viene detto *ampiezza d'onda*, ω è la *frequenza angolare* e k il *numero d'onda* (pari al numero di oscillazioni dell'onda in un tratto spaziale di lunghezza 2π).

Poiché l'equazione delle onde è lineare ed omogenea, una combinazione lineare di soluzioni è anch'essa soluzione. In particolare, possiamo sovrapporre

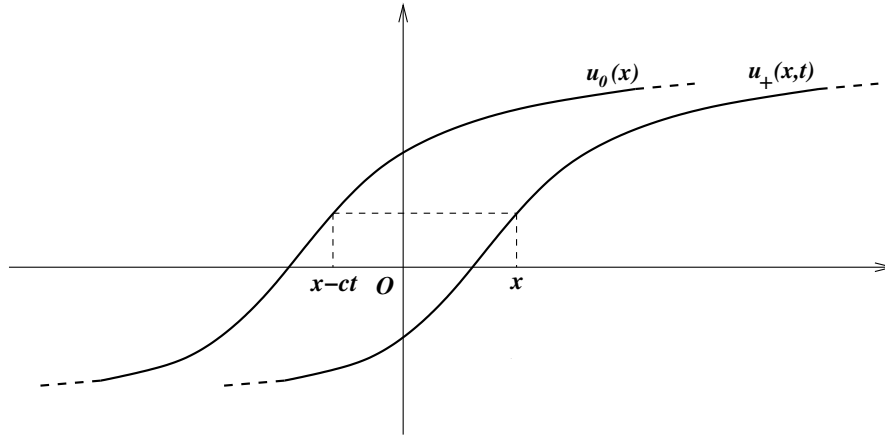
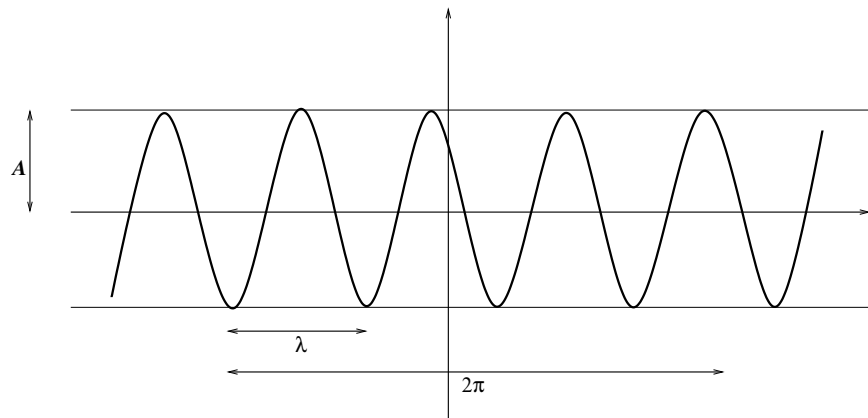
FIGURA 3.1. Esempio di onda viaggiante diretta al tempo $t > 0$ 

FIGURA 3.2. Onda armonica

due onde armoniche con velocità opposte ed uguali ampiezza e fase iniziale, ottenendo la nuova soluzione di (3.1),

$$u(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \varphi) + A \cos(kx - \omega t + \varphi) = 2A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t),$$

che rappresenta un'onda armonica stazionaria. In questo caso infatti il profilo iniziale $u_0(x) = 2A \cos(kx + \varphi)$ non si propaga, ma è modulato in ampiezza nel tempo da oscillazioni armoniche: $u(x, t) = u_0(x) \cos(\omega t)$.

Gli esempi precedenti mostrano una proprietà generale dell'equazione delle onde, ovvero come essa possa dar luogo sia a fenomeni di propagazione che di oscillazione. L'analisi di questo capitolo mette in evidenza i primi, mentre il prossimo capitolo è dedicato al metodo di Fourier, che meglio si presta a descrivere i fenomeni oscillatori.

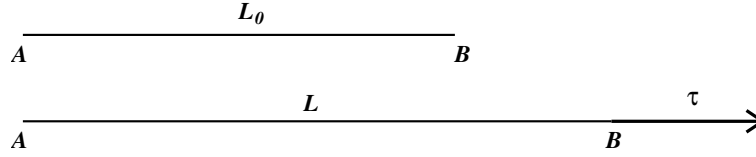


FIGURA 3.3. Allungamento del filo dal valore naturale L_0 al valore L dovuto alla tensione τ applicata in B

3.2. Equazione della corda vibrante: derivazione

3.2.1. Vibrazioni libere della corda. Prendiamo in considerazione un tratto di filo AB , omogeneo, *perfettamente flessibile* e *perfettamente elastico*, di lunghezza naturale L_0 . Fissato l'estremo A , sottoponiamo l'estremo B ad una forza di trazione gradualmente crescente da zero fino a giungere ad un valore finale τ . Perveniamo in tal modo ad uno stato rettilineo di equilibrio nel quale il filo ha lunghezza $L > L_0$ dipendente dalla tensione τ , dunque $L = \phi(\tau)$, vedi Figura 3.3. La perfetta elasticità implica la reversibilità del fenomeno: diminuendo gradualmente dal valore τ fino a zero la tensione applicata in B , il filo torna alla lunghezza naturale L_0 , restituendo in questa fase tutto il lavoro ricevuto dalla forza di trazione durante la prima deformazione. Altrimenti detto, il lavoro eseguito dalla forza di trazione si accumula nel filo sotto forma di un'energia potenziale elastica, dipendente unicamente dallo stato di deformazione del filo:

$$U = U(L) = U(L_0) + \int_{L_0}^L d\ell \tau(\ell) = U(L_0) + \int_{L_0}^L d\ell \phi^{-1}(\ell)$$

(ϕ si assume crescente).

Fissiamo ora uno stato di equilibrio (τ, L) e consideriamo tutti gli stati $(\tau + \delta\tau, L + \delta L)$ ad esso prossimi, ottenuti con una variazione (algebrica) infinitesima $\delta\tau$ della tensione. Per la legge di Hooke, l'incremento di tensione $\delta\tau$ corrispondente all'incremento di lunghezza δL è ad esso proporzionale. Altrimenti detto, $\phi'(\tau) > 0$, cosicché invertendo la relazione $L = \phi(\tau)$ e sviluppando secondo Taylor al prim'ordine abbiamo $\delta\tau = C\delta L + O((\delta L)^2)$ con $C = \phi'(\tau)^{-1}$. D'altra parte, per la definizione di U ,

$$U(L + \delta L) - U(L) = \int_L^{L+\delta L} d\ell \phi^{-1}(\ell) = \tau\delta L + O((\delta L)^2),$$

essendo $\phi^{-1}(L) = \tau$. Pertanto, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in δL , approssimiamo $U(L + \delta L) = U(L) + \tau\delta L$. Poiché l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva, possiamo fissare $U(L) = 0$ ed attribuire a ciascuno stato di equilibrio $(\tau + \delta\tau, L + \delta L)$ vicino a (τ, L) l'energia elastica

$$U = \tau\delta L.$$

Estendiamo ora quanto stabilito anche alle condizioni dinamiche, in cui la corda si trova in uno stato non necessariamente rettilineo e stazionario, ma sempre vicino all'equilibrio forzato (τ, L) . Tale estensione è giustificata anche

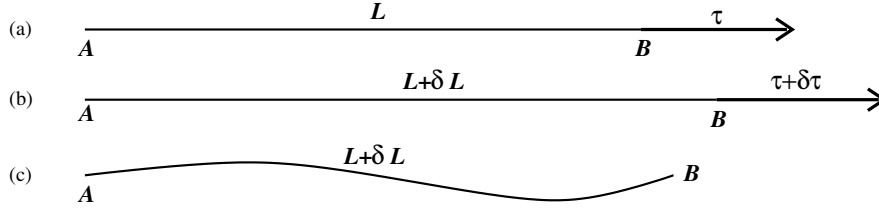


FIGURA 3.4. L'energia elastica accumulata non dipende dal piegamento ma solo dalla lunghezza del filo: $U(a) = 0$, $U(b) = U(c) = \tau \delta L$.

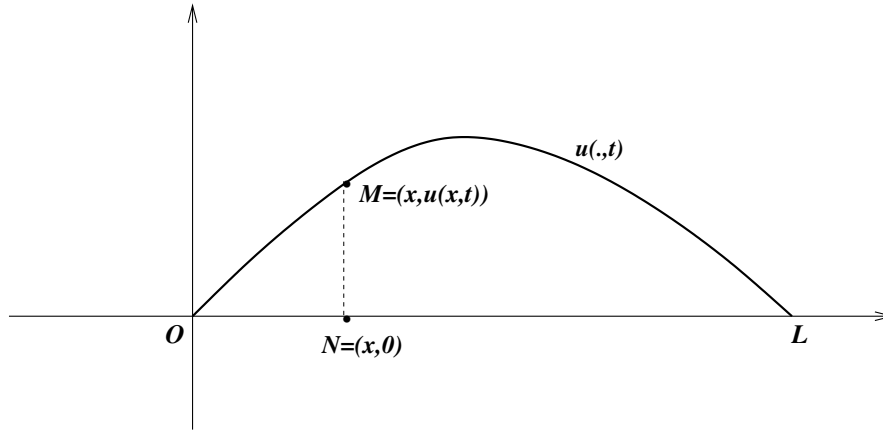


FIGURA 3.5. La configurazione della corda al tempo t è individuata dal profilo $u(\cdot, t)$ rispetto alla posizione di riposo $u(\cdot) \equiv 0$.

dall'ipotesi di perfetta flessibilità: il filo non oppone resistenza ad essere piegato, cosicché anche in uno stato non rettilineo accumula solo energia potenziale elastica, vedi Figura 3.4.

Specifichiamo ora le configurazioni dinamiche, ovvero il tipo di moti, che prendiamo in esame. Assumiamo innanzitutto che gli estremi della corda siano mantenuti fissi (chiaramente a distanza L). Consideriamo inoltre solo *moti piani, trasversali e piccoli* della corda. Quindi, se fissiamo un sistema di coordinate cartesiane sul piano del moto in modo tale che la corda all'equilibrio giace sul segmento $[0, L]$ dell'asse delle ascisse, possiamo affermare che la configurazione della corda rimane individuata da una funzione numerica $u(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \in \mathbb{R}$, in modo tale che $M = (x, u(x, t))$ è il punto geometrico del piano occupato al tempo t dal punto fisico della corda che nella configurazione di equilibrio si trova in $N = (x, 0)$, vedi Figura 3.5. L'assunzione di piccoli moti si formalizza affermando che studiamo i moti per i quali

$$|u(x, t)| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \ll 1,$$

mentre la condizione di estremi fissati si riduce semplicemente ad imporre che

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alla configurazione della corda individuata dal profilo $u(\cdot, t)$ al tempo t associamo l'energia potenziale

$$U[u(\cdot, t)] = \tau \delta L = \tau \left[\int_0^L dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - L \right] = \tau \int_0^L dx \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right].$$

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$ possiamo trascurare i termini di ordine superiore al secondo (usando lo sviluppo $\sqrt{1 + a^2} = 1 + a^2/2 + O(a^4)$) ed assumere

$$U[u(\cdot, t)] = \frac{\tau}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

D'altra parte, se ρ è la densità lineare di massa del filo omogeneo, l'energia cinetica del tratto di corda che insiste sull'intervallo $[x, x + dx]$ è pari a

$$dT = \frac{\rho}{2} dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + O((dx)^2),$$

pertanto l'energia cinetica della corda nello stato di moto il cui profilo di velocità al tempo t è $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ si scrive

$$T \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right] = \frac{\rho}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

Quindi la lagrangiana della corda con posizione $u(\cdot, t)$ e velocità $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ è

$$\mathcal{L} \left(u(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right) = \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

OSSERVAZIONE 3.1. La corda vibrante è un sistema con infiniti gradi di libertà, lo “spazio delle fasi” è l'insieme delle coppie di funzioni $(u, v) = (u(x), v(x))$, $x \in [0, L]$, con $u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = 0$. La lagrangiana è il funzionale $\mathcal{L} = \mathcal{L}[u, v]$ su tale spazio tale che

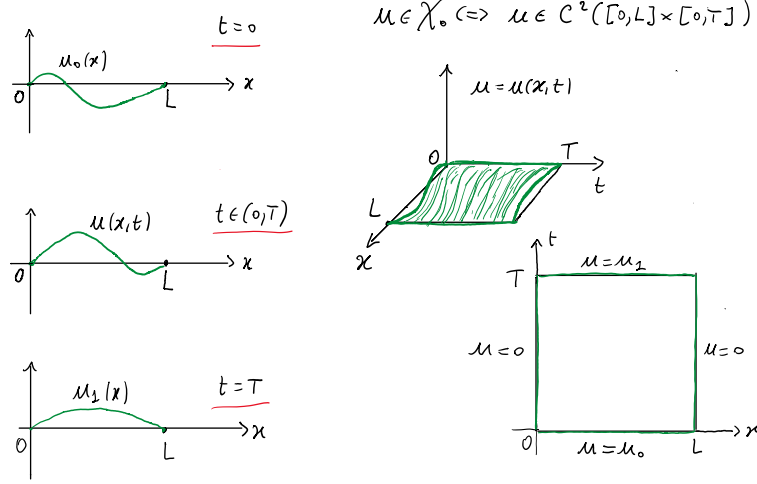
$$\mathcal{L}[u, v] = \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2} v^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

(pari a $\mathcal{L} \left[u(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right]$ quando calcolato lungo un moto $t \mapsto u(\cdot, t)$).

Possiamo ora costruire il funzionale d'azione del problema. Fissiamo una qualsivoglia coppia di profili $u_0, u_1 \in C^2([0, L])$ tali che $u_0(0) = u_1(0) = u_0(L) = u_1(L) = 0$ ed introduciamo lo spazio $\mathcal{X}_0$ di tutte le possibili traiettorie della corda che durante l'intervallo di tempo $[0, T]$ connettono questi due profili, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 = \{ & u \in C^2([0, L] \times [0, T]) : u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ & u(x, 0) = u_0(x), u(x, T) = u_1(x) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \} \end{aligned}$$

(vedi Figura 3.6). Il funzionale d'azione $\mathcal{A} : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ è allora

FIGURA 3.6. Traiettorie tra i due profili u_0 e u_1 .

$$\mathcal{A}[u] = \int_0^T dt \mathcal{L}\left(u(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)\right) = \int_0^T dt \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

L'equazione delle vibrazioni trasversali libere della corda è ora derivata dal principio di Hamilton. Cerchiamo pertanto di caratterizzare le curve che rendono stazionaria l'azione $\mathcal{A}$ sopra definita. La variazione $u + \varepsilon h$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, di u è ancora un elemento di $\mathcal{X}_0$ purché h sia scelta nell'insieme

$$H_0 = \{h \in C^2([0, L] \times [0, T]) : h(x, 0) = h(x, T) = 0, \\ h(0, t) = h(L, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T]\}.$$

La derivata del funzionale in $u \in \mathcal{X}_0$, che indichiamo con $\delta_u \mathcal{A} : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$, si calcola facilmente,

$$\delta_u \mathcal{A}[h] = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}[u + \varepsilon h] \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^T dt \int_0^L dx \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} - \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right].$$

Vogliamo pertanto caratterizzare le $u \in \mathcal{X}_0$ tali che

$$\int_0^T dt \int_0^L dx \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} - \tau \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0 \quad \forall h \in H_0.$$

Applicando il teorema di Fubini e integrando quindi per parti rispetto alla variabile temporale si ha

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^L dx \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} &= \int_0^L dx \int_0^T dt \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \int_0^L dx \left[\frac{\partial u}{\partial t} h \right]_{t=0}^{t=T} - \int_0^L dx \int_0^T dt \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} h. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Analogamente,

$$\int_0^T dt \int_0^L dx \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = \int_0^T dt \left[\frac{\partial u}{\partial x} h \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^T dt \int_0^L dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h. \quad (3.3)$$

Ma in entrambe le formule precedenti i termini di bordo sono identicamente nulli per le ipotesi su h , cosicché la condizione di stazionarietà diventa

$$\int_0^T dt \int_0^L dx \left(-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) h = 0 \quad \forall h \in H_0.$$

Poiché $-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ è una funzione continua, per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni concludiamo che $u \in \mathcal{X}_0$ è stazionaria se e solo se è soluzione dell'equazione

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0.$$

Le vibrazioni trasversali libere della corda sono pertanto governate dall'equazione delle onde omogenea in dimensione uno,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

con parametro $c = \sqrt{\tau/\rho}$.

3.2.2. Interpretazione euristica e vibrazioni forzate. L'interpretazione euristica dell'equazione trovata è piuttosto naturale. Infatti possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \tau dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (3.4)$$

Il termine a sinistra rappresenta, a meno di infinitesimi $O((dx)^2)$, il prodotto della massa per l'accelerazione del tratto di corda che insiste sull'intervallo $[x, x + dx]$. Vogliamo allora riconoscere nel termine di destra la forza, agente sul medesimo tratto di corda, dovuta alla tensione con il resto della corda. In effetti possiamo pensare che il tratto di corda in esame sia sottoposto alla somma della forza di tensione $-\vec{T}(x, t)$, applicata nell'estremo $(x, u(x, t))$ e dovuta al tratto rimanente di corda alla sua sinistra, e della forza di tensione $\vec{T}(x + dx, t)$, applicata nell'estremo $(x + dx, u(x + dx, t))$ e dovuta al tratto rimanente di corda alla sua destra, vedi Figura 3.7. Detto $\alpha(x, t)$ l'angolo che la direzione tangente al grafico della corda nel punto $(x, u(x, t))$ forma con l'asse delle ascisse, poiché assumiamo $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$ possiamo approssimare, al primo ordine,

$$\sin \alpha(x, t) \simeq \tan \alpha(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \cos \alpha(x, t) \simeq 1.$$

La tensione $\vec{T}(x, t)$ in ogni punto $(x, u(x, t))$ della corda è diretta sempre lungo la tangente per l'ipotesi di perfetta flessibilità. Inoltre, poiché consideriamo variazioni infinitesime della corda, possiamo assumere che il suo modulo sia

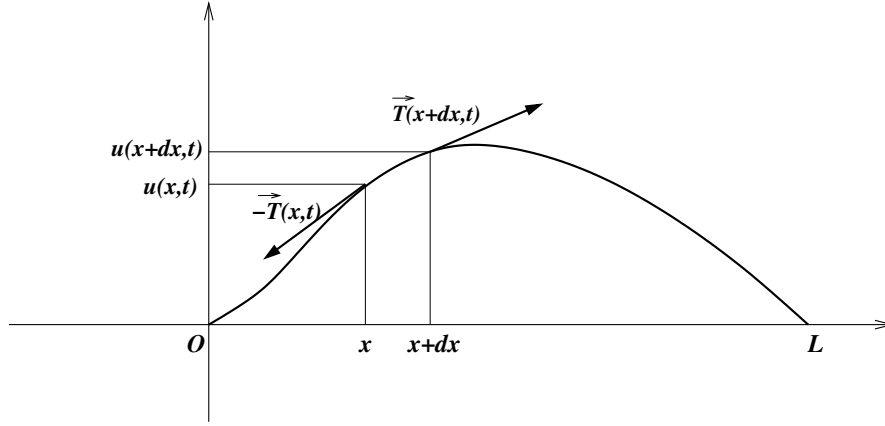


FIGURA 3.7. Forze di tensione che agiscono sul tratto di corda che insiste sull'intervallo $[x, x + dx]$.

uguale al valore uniforme all'equilibrio, ovvero $|\vec{T}(x, t)| = \tau$. Pertanto $\vec{T}(x, t)$ ha componenti

$$\vec{T}(x, t) = \tau \begin{pmatrix} \cos \alpha(x, t) \\ \sin \alpha(x, t) \end{pmatrix} \simeq \tau \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la risultante delle forze di tensione sul tratto di corda ha componenti

$$\begin{aligned} \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) &\simeq \tau \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \end{pmatrix} + O((dx)^2). \end{aligned}$$

Dunque, consistentemente con l'ipotesi di trasversalità del moto, la componente orizzontale della risultante delle forze è nulla, mentre la componente verticale coincide con il membro di destra dell'Eq. (3.4). L'equazione delle onde nella forma (3.4) si interpreta pertanto come la proiezione lungo l'asse verticale dell'equazione di Newton per il medesimo tratto di corda.

Tale interpretazione conduce ad introdurre anche l'*equazione delle vibrazioni forzate della corda*,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = F(x, t),$$

dove $F(x, t)$ rappresenta la densità per unità di lunghezza di una possibile forza esterna agente sulla corda. Come nel caso libero riscriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad (3.5)$$

con parametro $c = \sqrt{\tau/\rho}$ ed essendo ora $f(x, t) = F(x, t)/\rho$ la densità per unità di massa della forza esterna. Si osservi che anche tale equazione può essere dedotta direttamente dal principio di Hamilton. È sufficiente considerare il funzionale d'azione

$$\mathcal{A}[u] = \int_0^T dt \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + Fu \right],$$

dove il termine $-\int_0^L dx Fu$ è l'energia potenziale associata alla forza F (indipendente da u) agente sulla corda. Il calcolo della derivata $\delta_u \mathcal{A} : H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ si esegue come in precedenza e la presenza del termine aggiuntivo (lineare in u) fornisce ora

$$\delta_u \mathcal{A}[h] = \int_0^T dt \int_0^L dx \left(-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F \right) h.$$

La condizione di stazionarietà $\delta_u \mathcal{A}[h] = 0 \quad \forall h \in H_0$ conduce in questo caso all'equazione (3.5) per la curva stazionaria u .

OSSERVAZIONE 3.2. L'equazione della corda vibrante (3.5) è stata dedotta assumendo che gli estremi della corda fossero bloccati nei punti $(0, 0)$ e $(L, 0)$. Più in generale, possiamo imporre che essi siano vincolati ad eseguire un moto trasversale assegnato, ovvero

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $a(t), b(t)$ funzioni fissate. In questo caso il funzionale d'azione è definito sullo spazio di curve

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{a,b} = \{ & u \in C^2([0, L] \times [0, T]) : u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \\ & u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = u_1(x) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \}. \end{aligned}$$

Nuovamente la variazione $u + \varepsilon h$ di $u \in \mathcal{X}_{a,b}$ appartiene a $\mathcal{X}_{a,b}$ se e solo se $h \in H_0$, pertanto la condizione di stazionarietà per il funzionale d'azione $\mathcal{A}$ conduce sempre all'equazione (3.5).

3.2.3. Corda con estremi liberi. Supponiamo ora che gli estremi della corda non siano vincolati ma liberi di muoversi (sempre trasversalmente). Questi estremi possono essere sottoposti a forze di diversa natura. Compatibilmente con l'approssimazione lineare (rispetto ad u) assumiamo che gli estremi della corda siano sottoposti a due tensioni assegnate $f_0(t)$ e $f_1(t)$ e richiamati dalle posizioni di riposo $(0, 0)$ e $(L, 0)$ attraverso due molle elastiche di costanti k_0 e k_1 rispettivamente, vedi Figura 3.8. In questo caso l'energia potenziale della corda nella posizione $u(\cdot, t)$ al tempo t è

$$\begin{aligned} U[u(\cdot, t), t] = & \int_0^L dx \left[\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - Fu \right] + \frac{k_0}{2} u(0, t)^2 + \frac{k_1}{2} u(L, t)^2 \\ & - f_0(t) u(0, t) - f_1(t) u(L, t), \end{aligned}$$

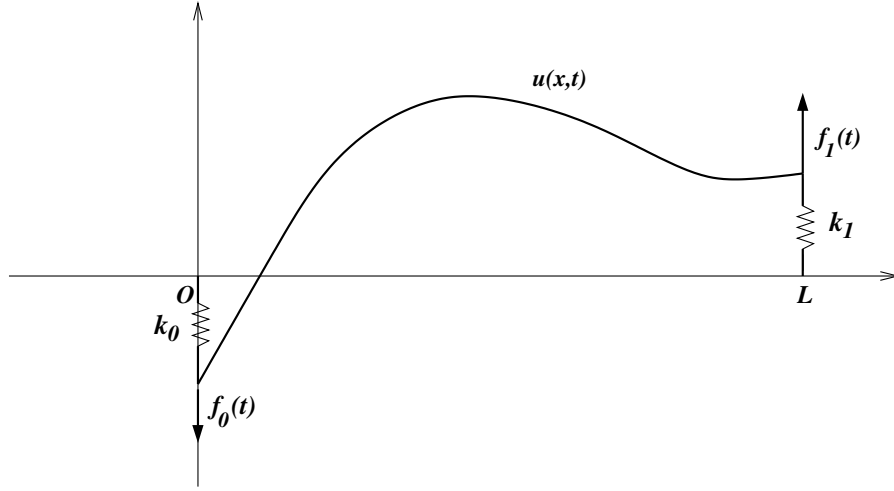


FIGURA 3.8. Corda vibrante con estremi liberi sottoposti alle forze $f_0(t) - k_0 u(0, t)$ e $f_1(t) - k_1 u(L, t)$.

e dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[u] = \int_0^T dt \left\{ \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + Fu \right] - \frac{1}{2} k_0 u(0, t)^2 - \frac{1}{2} k_1 u(L, t)^2 \right. \\ \left. + f_0(t) u(0, t) + f_1(t) u(L, t) \right\}. \end{aligned}$$

Inoltre, nessuna condizione è imposta sul valore di u agli estremi, pertanto il funzionale deve essere considerato sullo spazio di profili

$$\mathcal{X} = \{u \in C^2([0, L] \times [0, T]) : u(x, 0) = u_0(x), u(x, T) = u_1(x) \ \forall x \in [0, L]\}.$$

In questo caso la variazione $u + \varepsilon h$ di $u \in \mathcal{X}$ appartiene a $\mathcal{X}$ se e solo se $h \in H$, dove

$$H = \{h \in C^2([0, L] \times [0, T]) : h(x, 0) = h(x, T) = 0 \ \forall x \in [0, L]\}.$$

Nel calcolo della derivata di $\mathcal{A}[u]$ occorre tener conto sia del contributo dovuto al potenziale elastico delle molle sia del fatto che ora solo i termini di bordo nella (3.2) sono nulli, mentre quelli nella (3.3) permangono. Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} \delta_u \mathcal{A}[h] = \int_0^T dt \int_0^L dx \left(-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F \right) h \\ - \int_0^T dt \left[\tau \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + k_1 u(L, t) - f_1(t) \right] h(L, t) \\ + \int_0^T dt \left[\tau \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - k_0 u(0, t) + f_0(t) \right] h(0, t). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà nella scelta di h (e quindi anche delle funzioni $h(0, t)$ e $h(L, t)$), la condizione di stazionarietà impone che u sia soluzione dell'equazione (3.5) e

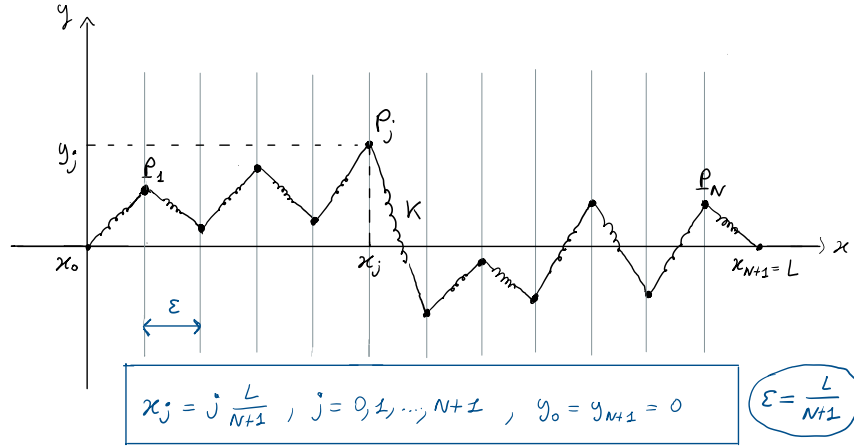


FIGURA 3.9. Catena di oscillatori per l'equazione d'onda.

che soddisfi inoltre le condizioni al bordo,

$$\tau \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - k_0 u(0, t) + f_0(t) = 0, \quad \tau \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + k_1 u(L, t) - f_1(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

In particolare, se nessuna forza agisce sugli estremi della corda,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0,$$

ovvero la pendenza della corda agli estremi si mantiene orizzontale.

3.2.4. Derivazione microscopica dell'equazione della corda vibrante. Vogliamo derivare, almeno formalmente, l'equazione delle vibrazioni libere trasversali della corda come limite della dinamica di una *catena di oscillatori armonici* quando il loro numero cresce indefinitamente e la loro distanza relativa diventa infinitesima. La catena di oscillatori è così definita, vedi Figura 3.9. Consideriamo N punti materiali P_j , $j = 1, \dots, N$, di uguale massa m e vincolati a muoversi su rette parallele ed equidistanziate di un piano. Pertanto, in un opportuno sistema di riferimento cartesiano, le coordinate (x_j, y_j) del punto P_j sono vincolate ad avere ascissa costante $x_j = j \frac{L}{N+1}$, con $L > 0$ fissato. Per $j = 2, \dots, N-1$, il punto P_j è richiamato dai punti P_{j-1} e P_{j+1} mediante forze elastiche di uguale costante K . Il punto P_1 [risp. P_N] è richiamato dal punto P_2 [risp. P_{N-1}] e dal punto geometrico $(x_0, y_0) = (0, 0)$ [risp. $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (L, 0)$] mediante forze elastiche della medesima costante K . Il moto $\{y_j(t); j = 1, \dots, N\}$ degli oscillatori è quindi soluzione del problema

$$m \ddot{y}_j = -K(y_j - y_{j-1}) - K(y_j - y_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (y_0 = y_{N+1} = 0).$$

Vogliamo che tale sistema descriva una corda vibrante di lunghezza a riposo L con estremi fissi quando $N \rightarrow \infty$, ovvero $\epsilon := \frac{L}{N+1} \rightarrow 0$. Per ottenere questo è

necessario scegliere i parametri m e K dipendenti da ε . Innanzitutto osserviamo che poiché in un tratto di lunghezza unitaria abbiamo ε^{-1} oscillatori, per ottenere una corda di densità costante ρ occorre scegliere $m = \varepsilon\rho$. Supponiamo inoltre che $y_j(t)$ sia pari al valore in $x_j = \varepsilon j$ di un profilo regolare $u_\varepsilon(\cdot, t)$. Allora l'equazione del moto può essere scritta nella forma

$$\rho \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(j\varepsilon, t) = \varepsilon^{-1} K[u_\varepsilon(j\varepsilon + \varepsilon, t) + u_\varepsilon(j\varepsilon - \varepsilon, t) - 2u_\varepsilon(j\varepsilon, t)].$$

D'altra parte, se $f \in C^2(\mathbb{R})$, per lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine si ha

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x) &= [f(x + \varepsilon) - f(x)] + [f(x - \varepsilon) - f(x)] \\ &= f'(x)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x)\varepsilon^2 - f'(x)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ &= f''(x)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Pertanto l'equazione del moto si riscrive nella forma

$$\rho \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(j\varepsilon, t) = \varepsilon K \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(j\varepsilon, t) + K o(\varepsilon).$$

Scegliendo $K = \varepsilon^{-1}\tau$ e valutando la precedente relazione per $j = [\varepsilon^{-1}x]$ (dove $[a]$ indica la parte intera del numero reale a), otteniamo, per ogni $x \in [0, L]$,

$$\rho \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(x + o(1), t) = \tau \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x + o(1), t) + o(1),$$

dove $o(1)$ è un infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0$. Assumendo che la funzione $u_\varepsilon(x, t)$ converga ad una funzione regolare $u(x, t)$, dalla precedente relazione segue che quest'ultima funzione deve essere soluzione dell'equazione della corda vibrante. Vale la pena notare che il fatto che K debba divergere per $\varepsilon \rightarrow 0$ era ovvio sin dal principio: se solo richiediamo che il profilo finale sia una funzione almeno continua è necessario che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [u_\varepsilon(j\varepsilon + \varepsilon, t) - u_\varepsilon(j\varepsilon, t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y_{j+1}(t) - y_j(t)] = 0,$$

pertanto la forza che attrae tra loro due oscillatori vicini deve necessariamente divergere.

Il modello microscopico può essere generalizzato inserendo una forza di richiamo elastico verso la posizione di riposo ed una forzante esterna (vedi Figura 3.10):

$$m\ddot{y}_j = -K(y_j - y_{j-1}) - K(y_j - y_{j+1}) - K_1 y_j + F_j(t), \quad j = 1, \dots, N.$$

Assumendo ora $m = \varepsilon\rho$, $K = \varepsilon^{-1}\tau$, $K_1 = \varepsilon\gamma_1$ è facile verificare che se $F_j(t) = \varepsilon F(j\varepsilon, t)$ per qualche funzione regolare $F(x, t)$ allora il limite continuo della catena di oscillatori è ora descritto dall'*equazione delle onde generalizzata*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \gamma_1 u(x, t) + F(x, t), \quad (3.7)$$

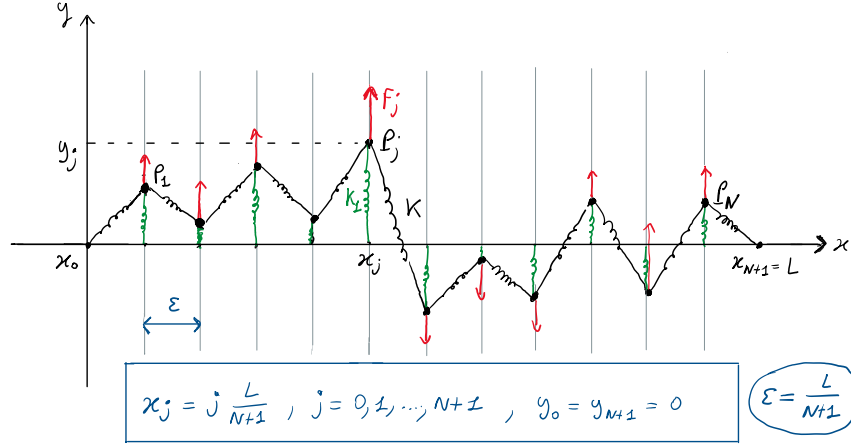


FIGURA 3.10. Modello microscopico per l'equazione d'onda generalizzata.

dove γ_1 è un parametro non negativo. Ovvero, con le posizioni $c = \sqrt{\tau/\rho}$, $\gamma = \gamma_1/\rho$, $f(x, t) = F(x, t)/\rho$, otteniamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \gamma u(x, t) + f(x, t). \quad (3.8)$$

OSSERVAZIONE 3.3. L'equazione (3.7) può essere dedotta dal principio variazionale considerando anche l'energia potenziale di una forza di richiamo elastica verso la posizione di riposo $u = 0$, distribuita in modo tale che, per ogni $x \in [0, L]$, il tratto di corda che insiste sull'intervallo $[x, x + dx]$ è soggetto alla forza elastica $-\gamma_1 u(x, t) dx$. L'energia potenziale complessiva è in questo caso

$$U[u(\cdot, t), t] = \int_0^L dx \left[\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma_1}{2} u^2 - F u \right],$$

che va ora utilizzata per costruire il funzionale d'azione. Inoltre è possibile considerare differenti condizioni agli estremi, come discusso nelle precedenti sottosezioni per il caso dell'equazione con $\gamma = 0$.

3.3. Problemi ben posti e metodo dell'energia

Attraverso il principio variazionale abbiamo caratterizzato il moto della corda durante un intervallo di tempo $[0, T]$ per assegnati profili iniziale e finale, u_0 a $t = 0$ e u_1 a $t = T$. D'altra parte, come nei problemi della meccanica con un numero finito di gradi di libertà (ad esempio la catena di oscillatori considerata nella sezione precedente), anche in questo contesto è più naturale formulare il *problema di Cauchy*, ovvero determinare il profilo $u(\cdot, t)$ ad un tempo $t > 0$, conoscendo lo stato meccanico della corda ad un tempo precedente, diciamo

$t = 0$. Essendo un'equazione del secondo ordine rispetto alla variabile temporale, tale stato è definito dal profilo della corda e dal suo profilo di velocità. Occorre pertanto fissare i dati iniziali

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x),$$

con g, h funzioni note. Ma perché il problema sia ben posto, ovvero u sia univocamente determinata, è necessario anche stabilire cosa avviene agli estremi della corda, ovvero fissare le *condizioni al bordo* (o *al contorno* o *condizioni limite*). In particolare, considereremo le seguenti condizioni, che qui formuliamo nel caso più generale dell'equazione (3.8).

- (1) *Problema di Cauchy globale*. Supponiamo la corda idealmente di lunghezza infinita, dunque senza estremi. Il problema corrispondente è pertanto

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u + f & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.9)$$

- (2) *Problema di Cauchy-Dirichlet*. Supponiamo che gli estremi della corda siano vincolati ad eseguire un moto trasversale prestabilito, individuato da due assegnate funzioni reali $a(t), b(t)$, vedi l'Osservazione 3.2. Il problema corrispondente è pertanto

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u + f & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t) & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

- (3) *Problema di Cauchy-Neumann*. Gli estremi della corda sono sottoposti a due tensioni assegnate $f_0(t)$ e $f_1(t)$, lasciando incognite le elongazioni ai bordi. Otteniamo così il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u + f & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta(t) & \text{per } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

con $\alpha(t) = -f_0(t)/\tau$, $\beta(t) = f_1(t)/\tau$ (vedi (3.6) con $k_0 = k_1 = 0$).

- (4) *Problema di Cauchy con condizioni periodiche*. Gli estremi della corda sono identificati. Dunque consideriamo il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u + f & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + L, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Non tratteremo invece il caso delle *condizioni miste (o di Robin)* definite dalla (3.6) con $k_0, k_1 \neq 0$.

Le condizioni al bordo dei problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann sono dette *omogenee* se, rispettivamente, $a(t) = b(t) = 0$ e $\alpha(t) = \beta(t) = 0$. Ricordiamo che l'equazione delle onde è detta omogenea se la forzante non è presente, ovvero se $f(x, t) = 0$.

Rimandando alle prossime sezioni il problema dell'esistenza delle soluzioni, vogliamo qui introdurre un metodo generale per dimostrare l'unicità di queste, noto come *metodo dell'energia*, applicandolo nei casi (3.10), (3.11), (3.12) in cui il problema è posto su un intervallo finito.

L'osservazione chiave è notare l'esistenza di un integrale primo dei problemi omogenei con dati al bordo omogenei, ovvero l'esistenza di una funzione del profilo $u(\cdot, t)$ e della velocità $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ che rimane costante nel tempo se calcolata lungo le soluzioni. Tale integrale è suggerito dalla formulazione lagrangiana del problema ed è dato dall'energia meccanica totale,

$$H(u, t) = T \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right] + U[u(\cdot, t)] = \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma_1}{2} u^2 \right],$$

ovvero dal funzionale

$$E(u, t) = \rho^{-1} H(u, t) = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} u^2 \right]. \quad (3.13)$$

Questo integrale è suggerito anche dalla derivazione microscopica dell'equazione (3.7). Infatti, il sistema di oscillatori senza forzante,

$$m\ddot{y}_j = -K(y_j - y_{j-1}) - K(y_j - y_{j+1}) - K_1 y_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

ammette l'integrale primo dell'energia meccanica totale

$$H_N = \sum_{j=1}^N \frac{m}{2} \dot{y}_j^2 + \sum_{j=0}^N \frac{K}{2} (y_{j+1} - y_j)^2 + \sum_{j=1}^N \frac{K_1}{2} y_j^2,$$

che, con le posizioni $m = \varepsilon \rho$, $K = \varepsilon^{-1} \tau$, $K_1 = \varepsilon \gamma_1$ e $y_j(t) = u_\varepsilon(j\varepsilon, t)$ (dove $\varepsilon = \frac{L}{N+1}$), si scrive

$$H_N = \sum_{j=1}^N \varepsilon \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(j\varepsilon, t) \right)^2 + \sum_{j=0}^N \varepsilon \frac{\tau}{2} \left(\frac{u_\varepsilon(j\varepsilon + \varepsilon, t) - u_\varepsilon(j\varepsilon, t)}{\varepsilon} \right)^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon \frac{\gamma_1}{2} u_\varepsilon(j\varepsilon, t)^2.$$

Nel limite $N \rightarrow \infty$ (ovvero $\varepsilon \rightarrow 0$), se $u_\varepsilon(x, t)$ converge uniformemente con le sue derivate ad una funzione regolare $u(x, t)$, allora è facile verificare che l'energia H_N converge proprio ad $H(u, t)$.

TEOREMA 3.1. *Sia $T > 0$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$ ed $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ una soluzione dell'equazione omogenea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \gamma u(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3.14)$$

con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee oppure Neumann omogenee oppure periodiche. Allora $E(u, t) = E(u, 0)$ per ogni $t \in [0, T]$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che $\frac{d}{dt}E(u, t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Dalla definizione (3.13), usando quindi il teorema di Schwarz e una integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(u, t) &= \int_0^L dx \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \gamma u \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= \int_0^L dx \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \gamma u \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ &= \int_0^L dx \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u \right] \frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=0}^{x=L}. \end{aligned}$$

Poiché u è soluzione di (3.14) l'ultimo integrale è nullo. I termini di bordo sono anch'essi nulli nei casi considerati. Infatti nel caso delle condizioni di Dirichlet omogenee, essendo $u(0, t) = u(L, t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$, derivando rispetto al tempo otteniamo $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = 0$. Invece, nel caso di condizioni di Neumann omogenee, è ovviamente $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$. Infine, nel caso di condizioni periodiche, essendo $u(x, t) = u(x + L, t)$ per ogni $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, derivando rispetto ad x e t otteniamo che anche le derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ sono L -periodiche rispetto ad x per ogni $t \geq 0$, e pertanto il termine di bordo è nullo anche in questo caso. $\square$

Vale la pena osservare che la tesi del teorema precedente sussiste anche se u è soluzione dell'equazione omogenea con condizioni al bordo di Dirichlet non omogenee purché indipendenti dal tempo, poiché anche in questo caso si ha $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = 0$. Il significato fisico è chiaro: se gli estremi della corda sono tenuti a quote fisse nel tempo, questa non scambia lavoro meccanico con l'esterno e quindi l'energia si conserva.

TEOREMA 3.2. *Per ogni $T > 0$ sia $Q_T = (0, L) \times (0, T)$. Allora, per fissati dati iniziali e al bordo, esiste al più una soluzione in $C^2(\overline{Q}_T)$ di ciascuno dei problemi (3.10), (3.11) e (3.12).*

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1 ed u_2 due soluzioni dello stesso problema con uguali dati iniziali ed uguali condizioni al bordo. Dobbiamo dimostrare che $u = u_1 - u_2$ è identicamente nulla su $\overline{Q}_T$. Osserviamo che, per la linearità dell'equazione, la funzione u è soluzione del problema omogeneo (3.14) con dati iniziali nulli e dati al bordo omogenei (se non periodici). Per il Teorema 3.1 si ha pertanto $E(u, t) = E(u, 0)$ per ogni $t \in [0, T]$. D'altra parte $E(u, 0) = 0$ poiché $u(x, 0) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ per ogni $x \in [0, L]$. Quindi $E(u, t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Essendo ora $c^2 > 0$ ed $u \in C^1(\overline{Q}_T)$, l'integrale che appare nella definizione (3.13) di $E(u, t)$ è nullo per ogni $t \in [0, T]$ se e solo se le derivate $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ sono identicamente nulle su $\overline{Q}_T$. Quindi u è una funzione costante su $\overline{Q}_T$; ma $u(x, 0) = 0$ per cui concludiamo che $u = 0$ su $\overline{Q}_T$. $\square$

ESERCIZIO 3.1. Si consideri la seguente variante dell'equazione (3.8),¹

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \gamma u(x, t) - \beta \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + f(x, t), \quad (3.15)$$

con $\beta > 0$, in cui il termine aggiuntivo $-\beta \frac{\partial u}{\partial t}$ rappresenta una forza di attrito che agisce sulla corda. Stabilire come si modifica il risultato del Teorema 3.1 e dedurre da ciò che il risultato di unicità del Teorema 3.2 sussiste anche in questo caso.

3.4. La soluzione di D'Alembert

Studiamo in questa sezione il problema di Cauchy globale (3.9) nel caso omogeneo ($f = 0$) e con $\gamma = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Cerchiamo la soluzione più generale (l'integrale generale) dell'equazione, dopodiché mostriamo che tale soluzione è univocamente determinata se imponiamo i dati iniziali, ottenendo in tal modo esistenza ed unicità del problema (3.16).

Utilizziamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2} \\ t = \frac{\eta - \xi}{2c} \end{cases}$$

e poniamo $w(\xi, \eta) = u(x, t)$ ovvero $u(x, t) = w(x - ct, x + ct)$ per la funzione regolare u , cosicché

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right], \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right], \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right].$$

Pertanto $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione delle onde (3.1) se e solo se $w(\xi, \eta)$ è soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

¹L'equazione della forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - C u(x, t) - D \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + f(x, t)$$

è anche nota con il nome di *equazione telegrafica* (o *equazione del telegrafo*), poiché, con la dovuta interpretazione della funzione incognita u , dei parametri $A, B, C, D > 0$ e della forzante f , descrive l'andamento della tensione e della corrente elettrica in un filo conduttore.

Riscrivendo quest'ultima equazione nella forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) = 0$$

concludiamo che $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ è funzione della sola ξ , dunque

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \theta(\xi),$$

da cui, integrando,

$$w(\xi, \eta) = \int d\xi \theta(\xi) + \theta_2(\eta),$$

con $\theta_2(\eta)$ una funzione arbitraria di η . Analogamente, il primo termine $\int d\xi \theta(\xi)$ è una funzione arbitraria di ξ . Denotandolo con $\theta_1(\xi)$, otteniamo infine

$$w(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta),$$

da cui, tornando alle variabili originarie,

$$u(x, t) = \theta_1(x - ct) + \theta_2(x + ct).$$

Quindi la soluzione più generale dell'equazione delle onde (3.1) si scrive come sovrapposizione di un'onda diretta e di un'onda inversa, entrambe con velocità di propagazione di modulo c . Chiaramente, perché u sia effettivamente soluzione occorre assumere $\theta_1, \theta_2 \in C^2(\mathbb{R})$.

Imponiamo ora le condizioni iniziali per determinare la soluzione del problema (3.16). Deve aversi,

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = g(x), \quad -\theta_1'(x) + \theta_2'(x) = \frac{1}{c} h(x).$$

Derivando la prima equazione e sommando alla seconda si ha

$$2\theta_2'(x) = g'(x) + \frac{1}{c} h(x)$$

da cui

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x dy h(y) + C_1,$$

con C_1 costante arbitraria. Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x dy h(y) - C_1.$$

Perveniamo in tal modo alla famosa *formula di D'Alembert*:

$$u(x, t) = \frac{g(x - ct) + g(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy h(y). \quad (3.17)$$

Chiaramente, se $g \in C^2(\mathbb{R})$ ed $h \in C^1(\mathbb{R})$ allora la $u(x, t)$ definisce una soluzione in $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Viceversa, ogni soluzione in $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ deve avere la forma (3.17) con $g(x) = u(x, 0)$ e $h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$. Altrimenti detto, il procedimento seguito dimostra l'esistenza ed unicità della soluzione del problema (3.16) in $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

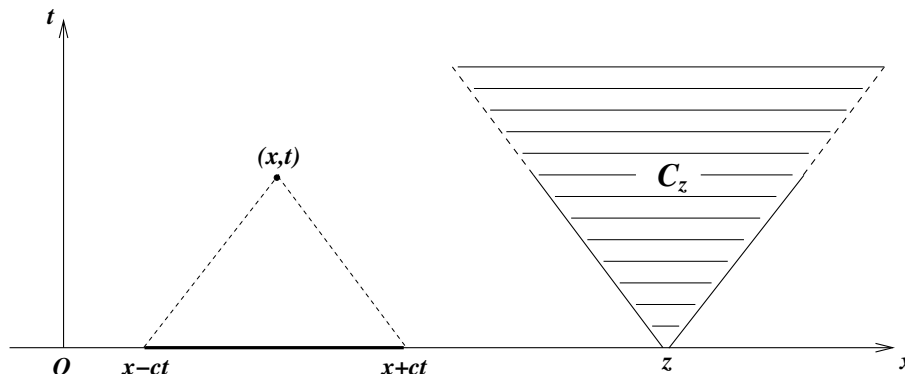


FIGURA 3.11. Dominio di dipendenza del punto (x, t) e cono di influenza del punto z .

OSSERVAZIONE 3.4. Se $g \in C^2(\mathbb{R})$ ed $h \in C^1(\mathbb{R})$, la soluzione (3.17) è definita su tutto l'asse reale dei tempi, ovvero $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, risolve l'equazione (3.1) su $\mathbb{R}^2$ e soddisfa i dati iniziali. Questo è legato ad una proprietà generale dell'equazione delle onde, (per la natura meccanica del problema), dovuta alla presenza della sola derivata temporale del secondo ordine, per cui se $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione (3.14) per $t > 0$, allora la funzione $v(x, t) = u(x, -t)$ è soluzione della stessa equazione per $t < 0$. Quindi, se la soluzione soddisfa l'equazione fino a $t = 0$, allora essa si prolunga automaticamente per tempi negativi e fornisce una soluzione del problema di Cauchy in tutto un intorno di $t = 0$.

OSSERVAZIONE 3.5. La formula di D'Alembert ha senso anche con ipotesi più deboli di regolarità sulle funzioni g ed h . In particolare, questo è il caso se $g \in C(\mathbb{R})$ ed h è limitata, situazione fisicamente ragionevole (si pensi ad una corda di chitarra inizialmente "pizzicata"). Si parla in tali casi di *soluzione generalizzata* e non più classica dell'equazione delle onde: sebbene non sia due volte differenziabile si può dimostrare che essa è soluzione di un'opportuna formulazione debole dell'equazione delle onde.

Fissato un punto $x \in \mathbb{R}$ ed un tempo $t > 0$, dalla formula di D'Alembert vediamo che la soluzione $u(x, t)$ dipende dal valore di g nei punti $x \pm ct$ e dal valore di h nell'intervallo $[x - ct, x + ct]$, detto *dominio di dipendenza* del punto (x, t) . Equivalentemente, i valori di g ed h in un punto $z \in \mathbb{R}$ influenzano il valore della soluzione $u(x, t)$ nel cono dello spazio-tempo

$$C_z := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : z - ct \leq x \leq z + ct\},$$

detto *cono di influenza* del punto z , vedi Figura 3.11.

Fissato un punto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, le rette di equazione $x \pm ct = x_0 \pm ct_0$ sono dette le *caratteristiche* del punto (x_0, t_0) , che indichiamo nel seguito con $\gamma_{\pm}(x_0, t_0)$. Le onde viaggianti $\theta_1(x - ct)$ e $\theta_2(x + ct)$ che costituiscono la soluzione $u(x, t)$ sono costanti, rispettivamente, lungo le caratteristiche $\gamma_{-}(x_0, t_0)$ e

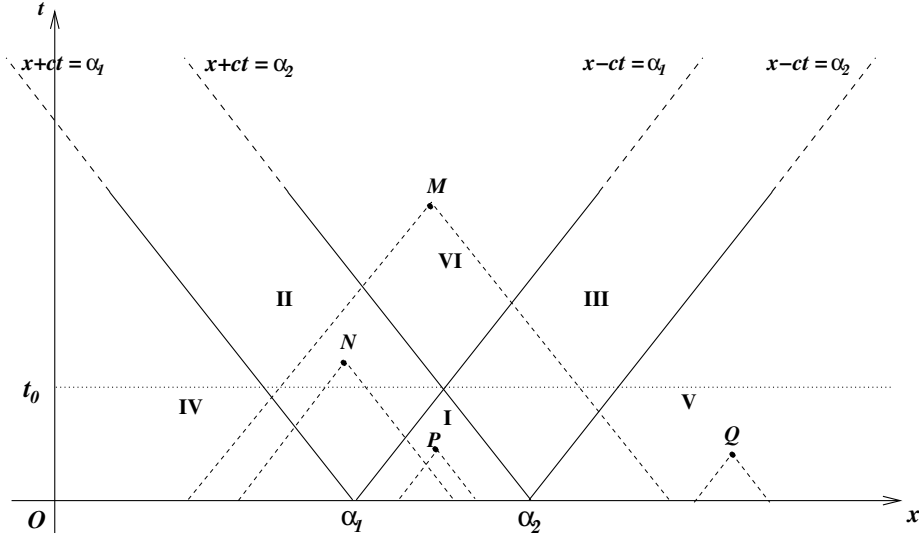


FIGURA 3.12. Partizione dello spazio-tempo $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ nelle sei regioni determinate dalle caratteristiche $\gamma_{\pm}(\alpha_1, 0)$ e $\gamma_{\pm}(\alpha_2, 0)$. Il tempo t_0 è pari a $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2c}$.

$\gamma_+(x_0, t_0)$. In particolare, $\theta_1(x - ct) = \theta_1(z)$ lungo $\gamma_-(z, 0)$ e $\theta_2(x + ct) = \theta_2(z)$ lungo $\gamma_+(z, 0)$. Dal punto di vista fisico ciò significa che le *perturbazioni (vibrazioni)* si propagano lungo le caratteristiche con velocità c . Per illustrare meglio questo fatto è utile analizzare i seguenti due casi.

- (1) *L'impulso iniziale è nullo ($h = 0$), dunque*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x - ct) + g(x + ct)].$$

Supponiamo inoltre che lo spostamento iniziale g abbia supporto nell'intervallo $[\alpha_1, \alpha_2]$, ovvero che $g(x) = 0$ per ogni $x \notin [\alpha_1, \alpha_2]$.

- (2) *Lo spostamento iniziale è nullo ($g = 0$), dunque*

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy h(y).$$

Supponiamo inoltre che l'impulso iniziale h abbia supporto nell'intervallo $[\alpha_1, \alpha_2]$, ovvero che $h(x) = 0$ per ogni $x \notin [\alpha_1, \alpha_2]$.

In entrambi i casi eseguiamo la partizione dello spazio-tempo $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ nelle sei regioni determinate dalle caratteristiche $\gamma_{\pm}(\alpha_1, 0)$ e $\gamma_{\pm}(\alpha_2, 0)$, vedi Figura 3.12. Nelle regioni I, II, III e VI il dominio di dipendenza di (x, t) ha intersezione non vuota con $[\alpha_1, \alpha_2]$ (vedi i punti P, N, M in Figura 3.12); nelle regioni IV e V il dominio di dipendenza di (x, t) ha intersezione vuota con $[\alpha_1, \alpha_2]$ (vedi il punto Q in Figura 3.12). In particolare:

- Se l'impulso iniziale è nullo si ha in generale $u(x, t) \neq 0$ nelle regioni I, II e III e $u(x, t) = 0$ nelle regioni IV, V e VI.

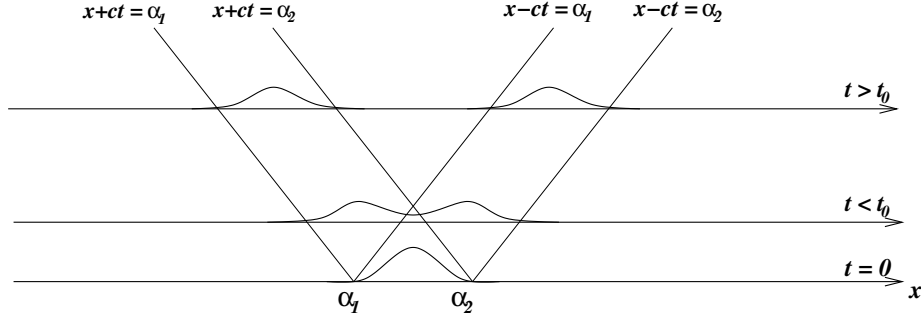


FIGURA 3.13. Evoluzione del profilo d'onda nel caso in cui $h = 0$ e g ha supporto nell'intervallo $[\alpha_1, \alpha_2]$.

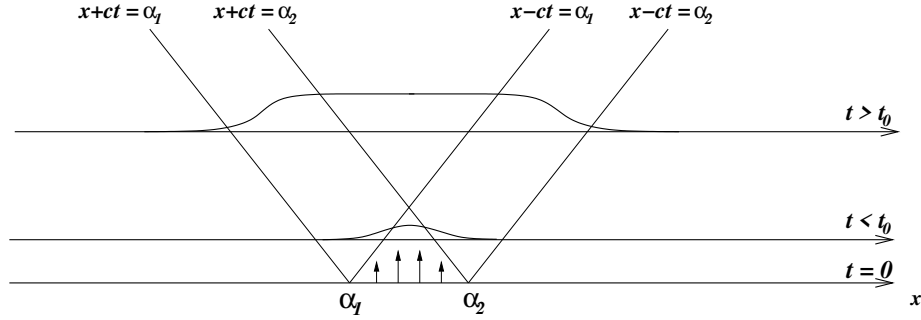


FIGURA 3.14. Evoluzione del profilo d'onda nel caso in cui $g = 0$ e h ha supporto nell'intervallo $[\alpha_1, \alpha_2]$.

- Se lo spostamento iniziale è nullo si ha in generale $u(x, t) \neq 0$ nelle regioni I, II, e III, $u(x, t) = 0$ nelle regioni IV e V e $u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dy h(y)$ nella regione VI.

Si osservi che se (x, t) è in una delle regioni IV o V vuol dire che in x al tempo t ancora non è arrivata la perturbazione iniziale (trasportata da un'onda diretta o inversa). Se invece (x, t) appartiene alla regione VI vuol dire che in x al tempo t la perturbazione iniziale è già passata oltre. Si osservi però la differenza tra il caso di impulso iniziale nullo (vedi Figura 3.13) e spostamento iniziale nullo (vedi Figura 3.14): nel primo caso la corda torna in quiete a $u = 0$, mentre nel secondo caso torna in quiete ma rimane "sollevata" a $u = \frac{1}{2c} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dy h(y)$. In entrambi i casi si tratta della sovrapposizione di un'onda diretta e di un'onda inversa, solo che nel primo caso queste onde hanno supporto compatto (sono entrambe pari a $\frac{1}{2}g(x)$), mentre nel secondo è $u(x, t) = \Phi(x + ct) - \Phi(x - ct)$, con $\Phi(x) := \frac{1}{2c} \int_0^x dy h(y)$ che non ha supporto compatto.

OSSERVAZIONE 3.6. È possibile avere la propagazione di una sola onda diretta o inversa per opportuni dati iniziali. Infatti se g, h sono tali che $\theta_1(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x dy h(y) = 0$ o $\theta_2(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x dy h(y) = 0$ si avrà, rispettivamente, assenza di onda diretta o assenza di un'onda inversa. Ad esempio, nel

caso (1), fissato $t_1 > t_0 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2c}$, i dati iniziali

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}g(x - ct_1), \quad \tilde{h}(x) = -\frac{c}{2}g'(x - ct_1)$$

'onda diretta, mentre i dati

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{2}g(x + ct_1), \quad \bar{h}(x) = -\frac{c}{2}g'(x + ct_1)$$

generano un'onda inversa. Questo fenomeno corrisponde ad una formulazione del *Principio di Huygens* che vedremo più avanti nel caso dell'equazione d'onda in $\mathbb{R}^3$ (dopo il passaggio del fronte d'onda la soluzione torna in quiete nella posizione di equilibrio $u = 0$). Nel caso unidimensionale qui in esame, la differenza si ha nel caso $h \neq 0$, in cui dopo il passaggio del fronte la corda torna in quiete ma in una posizione in generale diversa da zero.

ESERCIZIO 3.2. Usando la formula di D'Alembert mostrare che la soluzione dipende con continuità dai dati iniziali nel seguente senso. Siano u_1, u_2 soluzioni di dati iniziali g_1, h_1 e g_2, h_2 rispettivamente. Supponiamo inoltre che g_1, g_2, h_1, h_2 siano funzioni limitate. Allora, per ogni $T > 0$ esiste $C = C(T) > 0$ tale che

$$\|u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)\|_\infty \leq C(T) \max\{\|g_1 - g_2\|_\infty; \|h_1 - h_2\|_\infty\} \quad \forall t \in [0, T],$$

dove $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ è la norma uniforme della funzione limitata f su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.3. Dimostrare la formula di D'Alembert (3.17) utilizzando i risultati sul trasporto lineare della Sezione 2.2 ragionando nella seguente maniera. Sia $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ una soluzione classica del problema (3.16). Sfruttando che, per il teorema di Swartz,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u.$$

determinare la funzione

$$v := \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x},$$

(in termini di g e h) riconoscendo che essa è soluzione di un opportuno problema di trasporto lineare omogeneo. Determinare quindi la funzione incognita u sfruttando il fatto che, per definizione stessa di v , essa è soluzione del seguente problema di trasporto lineare non omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = v & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.5. La soluzione fondamentale

La soluzione di D'Alembert per generici dati iniziali può esprimersi in termini di una particolare soluzione, detta fondamentale, che corrisponde al problema di Cauchy generalizzato in cui $g = 0$ ed h è un impulso unitario concentrato

in un singolo punto. Si tratta dell'applicazione nel presente contesto di una strategia generale per le equazioni lineari, per la quale è sempre possibile esprimere l'integrale generale come sovrapposizione di soluzioni particolari, dette *soluzioni fondamentali* (o anche *funzioni di Green* o *funzioni sorgente*) del problema in esame.

Iniziamo con l'osservare che

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy h(y) = \frac{h(x+ct) + h(x-ct)}{2}.$$

Pertanto, se indichiamo con

$$W_\varphi(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy \varphi(y)$$

la soluzione dell'equazione delle onde per $g = 0$ ed $h = \varphi$, allora la funzione $\frac{\partial W_\varphi}{\partial t}$ fornisce la soluzione dell'equazione delle onde per $g = \varphi$ ed $h = 0$. Dunque la soluzione generale si scrive nella forma

$$u(x, t) = W_h(x, t) + \frac{\partial W_g}{\partial t}(x, t).$$

D'altra parte, se introduciamo la *funzione di Heaviside*,

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

allora, per ogni funzione localmente integrabile φ , si ha

$$W_\varphi(x, t) = \int dy K(x, y, t) \varphi(y),$$

dove il nucleo K è definito come

$$K(x, y, t) = \frac{1}{2c} [\mathcal{H}(x - y + ct) - \mathcal{H}(x - y - ct)] \quad (3.18)$$

e fornisce la *soluzione fondamentale* dell'equazione delle onde in $d = 1$. La formula di D'Alembert si scrive in termini di K nella forma

$$u(x, t) = \int dy K(x, y, t) h(y) + \frac{\partial}{\partial t} \int dy K(x, y, t) g(y).$$

Per capire il significato della soluzione fondamentale, consideriamo la famiglia di funzioni

$$\varphi_y^{(\varepsilon)}(x) := \frac{1}{2\varepsilon} [\mathcal{H}(x - y + \varepsilon) - \mathcal{H}(x - y - \varepsilon)] = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1} & \text{se } y - \varepsilon < x < y + \varepsilon, \\ (4\varepsilon)^{-1} & \text{se } x = y \pm \varepsilon, \\ 0 & \text{se } x \notin [y - \varepsilon, y + \varepsilon]. \end{cases}$$

Chiaramente,

$$\int dx \varphi_y^{(\varepsilon)}(x) = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_y^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x dz \varphi_y^{(\varepsilon)}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|(-\infty, x] \cap [y - \varepsilon, y + \varepsilon]|}{2\varepsilon} = \mathcal{H}(x - y), \quad (3.19)$$

cosicché

$$K(x, y, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dz \varphi_y^{(\varepsilon)}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_{\varphi_y^{(\varepsilon)}}(x, t)$$

rappresenta la soluzione relativa ad un impulso concentrato in y al tempo $t = 0$.

Poiché per ogni funzione continua ψ si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \varphi_y^{(\varepsilon)}(x) \psi(x) = \psi(y),$$

possiamo introdurre la notazione $\delta_y(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_y^{(\varepsilon)}(x)$, dove la “funzione generalizzata” $\delta_y(x)$, detta *funzione δ di Dirac* in $x = y$, non è una funzione nel senso usuale, ma rappresenta un modo di descrivere il funzionale lineare su $C(\mathbb{R})$ che associa alla funzione $\psi(x)$ il suo valore in $x = y$, mediante la scrittura

$$\int dx \delta_y(x) \psi(x) = \psi(y),$$

dove “ $dx \delta_y(x)$ ” rappresenta una “misura unitaria” concentrata nel punto y , cosicché l'integrale (cioè la media) di ψ rispetto ad essa è pari a $\psi(y)$. Si ponga attenzione al fatto che la precedente scrittura non deve essere confusa con un usuale integrale di Lebesgue: in particolare,

$$1 = \int dx \delta_y(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \varphi_y^{(\varepsilon)}(x) \neq \int dx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_y^{(\varepsilon)}(x) = 0, \quad (3.20)$$

dove l'ultimo integrale è nullo poiché abbiamo visto che il limite puntuale per $\varepsilon \rightarrow 0$ di $\varphi_y^{(\varepsilon)}(x)$ è una funzione nulla su tutto $\mathbb{R}$ tranne che in un punto (dunque nulla quasi ovunque).

Con questa notazione possiamo pertanto scrivere, in modo conciso, che

$$K(x, y, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dz \delta_y(z).$$

OSSERVAZIONE 3.7. La funzione δ di Dirac è un esempio di *funzione generalizzata* o *distribuzione*. Un'introduzione alla teoria delle distribuzioni verrà data nel Capitolo 5. Nell'ambito di tale teoria sarà possibile dare una caratterizzazione precisa della soluzione fondamentale come “soluzione generalizzata” dell'equazione delle onde.

3.6. Equazione non omogenea: formula di Duhamel

Vogliamo risolvere il problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde non omogenea, quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.21)$$

È sufficiente determinare una soluzione per il caso $g = h = 0$, dopodiché la soluzione del problema (3.21) si ottiene aggiungendo la soluzione del problema omogeneo associato (3.16). Pertanto cerchiamo una soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.22)$$

L'idea euristica del metodo di Duhamel si basa sul principio di sovrapposizione, ottenendo la soluzione cercata come somma di infiniti contributi corrispondenti alla propagazione libera degli impulsi infinitesimi $f(x, s)ds$ impressi alla corda ai tempi $s < t$. Per meglio comprendere il metodo conviene approssimare dapprima la forzante con una funzione costante a tratti del tempo,

$$f(x, s) = \sum_{j \geq 0} f(x, s_j) \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s), \quad s_j = j\Delta s,$$

dove $\chi_A(s)$ è la funzione indicatrice dell'insieme A e Δs è un intervallo di tempo molto piccolo. Per il principio di sovrapposizione, la soluzione del problema (3.22) si scrive come somma, $u(x, t) = \sum_{j \geq 0} u_j(x, t)$, con $u_j(x, t)$ soluzione dello stesso problema con forzante $f_j(x, s) = f(x, s_j) \chi_{[s_j, s_{j+1})}(s)$. Poiché tale forzante agisce solo nell'intervallo di tempo $[s_j, s_{j+1}]$ si ha $u_j(x, t) = 0$ se $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, s_j]$ e quindi, in particolare,

$$u_j(x, s_j) = \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, s_j) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, s_j) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sviluppando nel parametro piccolo Δs , utilizzando le precedenti identità ed il fatto che u_j è soluzione dell'equazione forzata,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, s_{j+1}) &= \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, s_j) + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x, s_j) \Delta s + o(\Delta s) \\ &= \left[c^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x, s_j) + f(x, s_j) \right] \Delta s + o(\Delta s) \\ &= f(x, s_j) \Delta s + o(\Delta s), \\ u_j(x, s_{j+1}) &= u_j(x, s_j) + \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, s_j) \Delta s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x, s_j) (\Delta s)^2 \\ &= \frac{1}{2} f(x, s_j) (\Delta s)^2 + o((\Delta s)^2), \end{aligned}$$

cosicché, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in Δs , $u_j(x, t)$ per $t > s_{j+1}$ è soluzione del problema libero

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times (s_{j+1}, \infty), \\ u_j(x, s_{j+1}) = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, s_{j+1}) = f(x, s_j) \Delta s & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ponendo attenzione al fatto che le condizioni iniziali sono ora date al tempo s_{j+1} , possiamo quindi affermare che

$$u_j(x, t) = \int dy K(x, y, t - s_{j+1}) f(y, s_j) \Delta s + o(\Delta s) \quad \forall t > s_{j+1}.$$

Pertanto, ricordando che u_j è nulla per $t \leq s_j$,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{j \geq 0} u_j(x, t) = \sum_{j: t > s_j} u_j(x, t) \\ &= \sum_{j: t > s_{j+1}} \left[\int dy K(x, y, t - s_{j+1}) f(y, s_j) \Delta s + o(\Delta s) \right] + O(\Delta s), \end{aligned}$$

dove il termine $O(\Delta s)$ esterno alla somma tiene conto del termine u_j con indice tale che $t \in [s_j, s_{j+1})$ che è stato tolto dalla stessa somma. Nel limite $\Delta s \rightarrow 0$, otteniamo in tal modo la candidata soluzione del problema (3.22) nella forma

$$u(x, t) = \int_0^t ds \int dy K(x, y, t - s) f(y, s) = \int_0^t ds w(x, t; s),$$

dove

$$w(x, t; s) := \int dy K(x, y, t - s) f(y, s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} dy f(y, s)$$

è la propagazione libera di un impulso iniziale $f(x, s)$ impresso al tempo $s < t$, ovvero soluzione del seguente problema,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times (s, \infty), \\ w(x, s; s) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, s; s) = f(x, s) & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Dobbiamo ora verificare che $u(x, t)$ è effettivamente la soluzione cercata. A tal scopo occorre fare delle ipotesi di regolarità sulla forzante f , precisamente assumiamo che $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, cosicché $w(x, t; s)$ è soluzione classica del problema (3.23). Per quanto riguarda le condizioni iniziali, banalmente $u(x, 0) = 0$. Inoltre, essendo $w(x, t; t) = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = w(x, t; t) + \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial t} w(x, t; s) = \int_0^t ds \frac{\partial w}{\partial t}(x, t; s),$$

cosicché $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Infine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial w}{\partial t}(x, t; t) + \int_0^t ds \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t; s) = f(x, t) + c^2 \int_0^t ds \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t; s) \\ &= f(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato le due derivazioni spaziali con l'integrale sul tempo, operazione legittimata dalle ipotesi su f che garantiscono una dipendenza continua dal parametro s di $w(x, t; s)$ e delle sue prime due derivate spaziali.

ESERCIZIO 3.4. Dimostrare l'unicità della soluzione in $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

ESERCIZIO 3.5. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy globale

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.7. Simmetrie e metodo delle riflessioni

Il metodo delle riflessioni permette di determinare la soluzione di alcuni problemi con condizioni al bordo in termini della soluzione di D'Alembert del problema globale. Esso si basa sulle seguenti proprietà di simmetria dell'equazione delle onde. Sia $u(x, t) = \theta_1(x - ct) + \theta_2(x + ct)$ una qualunque soluzione dell'equazione delle onde e poniamo

$$u_{\pm}(x, t) = \pm u(-x, t), \quad u_L(x, t) = u(x + L, t) \quad (L \in \mathbb{R}).$$

Si verifica immediatamente che anche le funzioni $u_{\pm}(x, t)$ e $u_L(x, t)$ sono soluzioni dell'equazione delle onde. Altrimenti detto, la riflessione per parità o disparità attorno all'origine e la traslazione di qualsiasi $L \in \mathbb{R}$ sono trasformazioni che portano soluzioni in soluzioni (trasformazioni di questo tipo vengono dette *simmetrie* dell'equazione). Supponiamo ora che i dati iniziali siano invarianti rispetto a una di queste simmetrie, ovvero che sia verificata una delle seguenti:

- 1) $u(x, 0) = u(-x, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(-x, 0)$ (parità);
- 2) $u(x, 0) = -u(-x, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\partial u}{\partial t}(-x, 0)$ (disparità);
- 3) $u(x, 0) = u(x + L, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x + L, 0)$ (periodicità di periodo L).

Allora, la soluzione u_+ nel caso 1), ovvero u_- nel caso 2) ed infine u_L nel caso 3) possiede gli stessi dati iniziali della soluzione originaria u e dunque, per l'unicità del problema di Cauchy globale, deve con essa coincidere. Ma $u = u_+$, $u = u_-$, $u = u_L$ significa rispettivamente che u è pari, dispari, periodica. Abbiamo in tal modo dimostrato che le eventuali proprietà di parità, disparità e periodicità dei dati iniziali rimangono verificate nel tempo dalla soluzione. In particolare, otteniamo da subito che la soluzione del problema di Cauchy con condizioni periodiche (3.12) è data sempre dalla formula di D'Alembert, provvisto che i dati iniziali $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$ siano funzioni L -periodiche.

Vediamo ora come utilizzare le suddette simmetrie nella soluzione dei problemi di Cauchy con dati al bordo omogenei. Consideriamo ad esempio il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

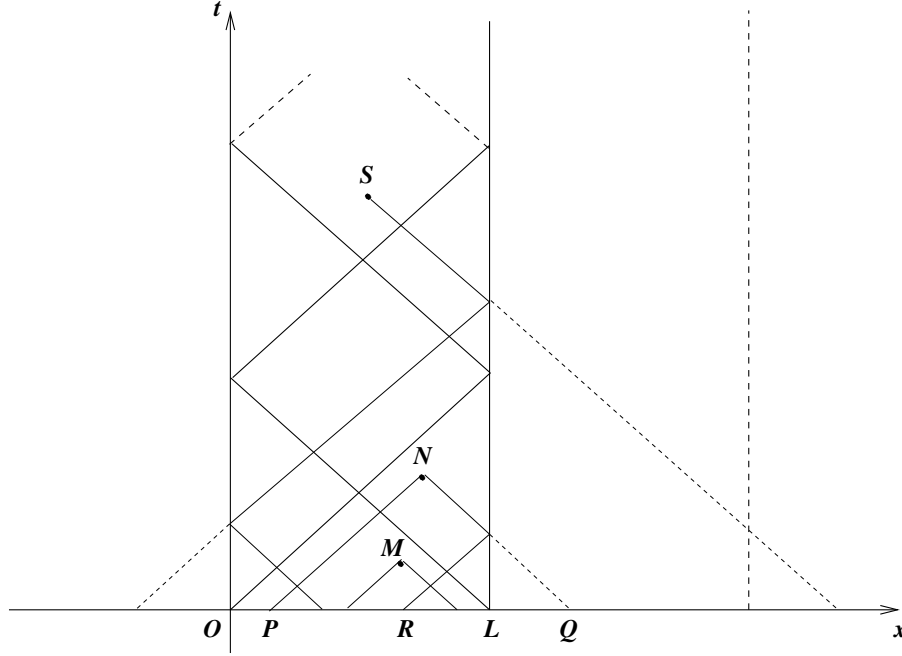


FIGURA 3.15. In metodo delle riflessioni per la corda finita.

Cerchiamo una soluzione $\tilde{u}(x, t)$ del problema di Cauchy globale di dati iniziali $\tilde{g}, \tilde{h}$ in modo tale che la sua restrizione all'intervallo $[0, L]$ sia soluzione del problema dato. Chiaramente, affinché siano soddisfatti i dati iniziali è necessario che $\tilde{g}, \tilde{h}$ siano un prolungamento delle funzioni g, h a tutto l'asse reale $\mathbb{R}$. Le funzioni $\tilde{g}, \tilde{h}$ devono inoltre essere scelte in modo tale che siano soddisfatte le condizioni al bordo, pertanto deve aversi

$$\tilde{u}(0, t) = 0, \quad \tilde{u}(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.24)$$

Notiamo ora che se realizziamo tale prolungamento estendendo le funzioni g, h dapprima per disparità all'intervallo $[-L, L]$ e quindi per periodicità (di periodo $2L$) a tutto l'asse reale $\mathbb{R}$, per quanto sopra discusso la soluzione

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\tilde{g}(x - ct) + \tilde{g}(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy \tilde{h}(y) \quad (3.25)$$

è anch'essa una funzione $2L$ -periodica e dispari della variabile spaziale x . Chiaramente, affinché tale soluzione sia classica, occorre richiedere che $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ e $\tilde{h} \in C^1(\mathbb{R})$, ovvero che $g \in C^2([0, L])$, $h \in C^1([0, L])$ ed inoltre

$$g(0) = g(L) = 0, \quad g''(0) = g''(L) = 0, \quad h(0) = h(L) = 0.$$

In queste ipotesi, essendo in particolare $\tilde{u}$ una funzione continua, $2L$ -periodica e dispari rispetto ad x per ogni t , le condizioni al bordo (3.24) rimangono soddisfatte. In conclusione, la restrizione di $\tilde{u}(x, t)$ all'intervallo $[0, L]$ fornisce la soluzione cercata.

Tale metodo di risoluzione è detto *metodo delle riflessioni* in virtù della seguente interpretazione sulla propagazione lungo le caratteristiche dei dati iniziali. Riscriviamo la soluzione nella forma di sovrapposizione di un'onda diretta ed una inversa, dunque $u(x, t) = \theta_1(x - ct) + \theta_2(x + ct)$ con

$$\theta_1(x) = \frac{\tilde{g}(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x dy \tilde{h}(y), \quad \theta_2(x) = \frac{\tilde{g}(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x dy \tilde{h}(y),$$

che, essendo $\tilde{g}, \tilde{h}$ funzioni dispari e $2L$ -periodiche, sono tali che

$$\theta_1(-x) = -\theta_2(x), \quad \theta_2(L+x) = -\theta_1(L-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

Con riferimento alla Figura 3.15, consideriamo ad esempio i punti $M = (x_0, t_0)$ nella regione I ed $N = (x_1, t_1)$ nella regione III. Nel primo caso la soluzione è

$$u(x_0, t_0) = \theta_1(x_0 - ct_0) + \theta_2(x_0 + ct_0), \quad x_0 - ct_0, x_0 + ct_0 \in [0, L],$$

cosicché il dominio di dipendenza è contenuto in $[0, L]$ e la presenza del bordo non è “rilevata” in x_0 al tempo t_0 . Nel secondo caso,

$$u(x_1, t_1) = \theta_1(x_1 - ct_1) + \theta_2(x_1 + ct_1), \quad x_1 - ct_1 \in [0, L], \quad x_1 + ct_1 \in [L, 2L].$$

In questo caso il dominio di dipendenza non è contenuto in $[0, L]$ e la presenza del bordo (nello specifico quello di destra) è “rilevata” in x_1 al tempo t_1 : il valore di u in N è pari alla sovrapposizione dell'onda diretta che parte dal punto “reale” della corda di ascissa $x = x_1 - ct_1$ (il punto P in figura) e dell'onda inversa che parte dal punto “fittizio” di ascissa $x = x_1 + ct_1$ (il punto Q in figura) esterno alla corda. D'altra parte, usando la seconda delle (3.26) si ha

$$u(x_1, t_1) = \theta_1(x_1 - ct_1) - \theta_1(2L - x_1 - ct_1).$$

Quindi l'onda inversa che parte dal punto fittizio Q può essere sostituita con l'onda diretta proveniente dal punto reale della corda di ascissa $x = 2L - x_1 - ct_1$ (il punto R in figura), riflessa nell'estremo $x = L$ al tempo $t = (x_1 + ct_1 - L)/c$ e cambiata di segno.

Più in generale, in ogni punto nella striscia $[0, L] \times \mathbb{R}_+$ il valore della soluzione è la sovrapposizione di due onde che hanno subito un certo numero di riflessioni ai bordi con un cambiamento di segno ad ogni riflessione (per un numero di riflessioni maggiore di uno, vedi ad esempio il punto S in figura, occorre utilizzare anche la periodicità delle funzioni θ_1, θ_2 e non solo le (3.26) per giungere a tale conclusione).

ESERCIZIO 3.6. Utilizzare il metodo delle riflessioni per risolvere il problema di Cauchy-Neumann omogeneo con dati al bordo omogenei,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3.7. Utilizzare il metodo delle riflessioni per risolvere i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann omogenei con dati al bordo omogenei per la corda semi-infinita,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, \infty), \\ \left\{ \begin{array}{ll} u(0, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \text{ (Dirichlet).} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \text{ (Neumann).} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3.8. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 3.5. La soluzione si scrive come somma $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ con

(i) $u_1(x, t)$ soluzione del problema omogeneo associato (quindi con $g(x) = x$ e $h(x) = 0$):

$$u_1(x, t) = \frac{x + t + x - t}{2} = x$$

(ii) $u_2(x, t)$ soluzione particolare calcolata con il metodo di Duhamel:

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \int_0^t ds \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} dy y^2 = \frac{1}{2} \int_0^t ds \left(\frac{(x+t-s)^3}{3} - \frac{(x-t+s)^3}{3} \right) \\ &= \int_0^t ds \frac{6x^2(t-s) + 2(t-s)^3}{6} = \frac{x^2 t^2}{2} + \frac{t^4}{12} \end{aligned}$$

Quindi

$$u(x, t) = x + \frac{x^2 t^2}{2} + \frac{t^4}{12}$$

SOLUZIONE ES. 3.6. Notiamo che una funzione due volte derivabile $\tilde{u}(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, tale che $x \mapsto \tilde{u}(x, t)$ sia $2L$ -periodica e pari soddisfa le condizioni al bordo. Infatti $x \mapsto \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, t)$ è $2L$ -periodica, dispari e continua, cosicché

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(L, t) = 0.$$

Sfruttiamo allora il fatto che la riflessione per parità e la traslazione sono simmetrie dell'equazione delle onde. Estendiamo g, h dapprima per parità all'intervallo $[-L, L]$ e quindi per periodicità (di periodo $2L$) a funzioni $\tilde{g}, \tilde{h}$ su $\mathbb{R}$, cosicché la soluzione

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\tilde{g}(x-ct) + \tilde{g}(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy \tilde{h}(y)$$

è anch'essa una funzione $2L$ -periodica e pari della variabile spaziale x . Affinché la soluzione sia classica, occorre richiedere che $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ e $\tilde{h} \in C^1(\mathbb{R})$, ovvero che $g \in C^2([0, L])$, $h \in C^1([0, L])$ ed inoltre

$$g'(0) = g'(L) = 0, \quad h'(0) = h'(L) = 0.$$

La funzione $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$, $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+$, è la soluzione cercata.

Equazione della corda vibrante: metodo di Fourier

4.1. Serie di Fourier

La famiglia di funzioni trigonometriche

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); n = 1, 2, \dots \right\}, \quad \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

(dove per $n = 0$ si intende la funzione costante uguale ad 1) hanno in comune la proprietà di essere C^∞ su $\mathbb{R}$ ed ivi $2L$ -periodiche. Esse godono inoltre delle seguenti importanti proprietà:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= L\delta_{n,k} & \forall n, k \geq 1, \\ \int_{-L}^L dx \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= L\delta_{n,k}(1 + \delta_{n,0}) & \forall n, k \geq 0, \\ \int_{-L}^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= 0 & \forall n \geq 1 \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

dove $\delta_{n,k}$ è la delta di Kronecker, ovvero $\delta_{n,n} = 1$ e $\delta_{n,k} = 0$ se $n \neq k$. Notiamo che se dotiamo lo spazio lineare delle funzioni $2L$ -periodiche di quadrato localmente integrabile del prodotto scalare

$$(u, v) = \int_{-L}^L dx u(x) v(x)$$

allora le precedenti relazioni affermano che le funzioni trigonometriche sono tra loro ortogonali.

Chiaramente, una combinazione lineare di tali funzioni,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right],$$

se composta da un numero finito di termini, oppure se i coefficienti a_n, b_n tendono a zero per $n \rightarrow \infty$ abbastanza rapidamente, definisce ancora una funzione regolare $2L$ -periodica. La questione non banale e di interesse è il viceversa: se $f(x)$ è una funzione $2L$ -periodica, essa si può espandere mediante una *serie trigonometrica* (o *serie di Fourier*),

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad (4.1)$$

ed i coefficienti a_n, b_n sono individuati in modo univoco?

Esistono diversi risultati, che dipendono in particolare da quale tipo di convergenza venga richiesta. Siamo qui interessati alla convergenza uniforme, ed il principale risultato della sezione è stabilire una condizione sufficiente per tale convergenza. Prima di enunciare il risultato, mostriamo come in questo caso i coefficienti siano univocamente determinati. Infatti, stante la convergenza uniforme, possiamo moltiplicare ambo i membri della (4.1) per una qualsiasi funzione trigonometrica e quindi integrare la serie termine a termine su $[-L, L]$. Dalle relazioni di ortogonalità si trovano subito i coefficienti dello sviluppo in termini della funzione f . Precisamente,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4.2)$$

(la scelta $a_0/2$ in (4.1) è stata fatta proprio in modo che la precedente espressione di a_n sia valida anche per $n = 0$).

TEOREMA 4.1. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica. Sussiste allora lo sviluppo in serie di funzioni trigonometriche (4.1) con i coefficienti come in (4.2). La serie converge uniformemente ad f su tutto $[-L, L]$. Inoltre la convergenza è totale, nel senso che*

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|) < \infty. \quad (4.3)$$

È chiaro che la condizione (4.3) implica la convergenza uniforme della serie di Fourier. Infatti ciascun termine della serie numerica (4.3) domina il modulo di ciascun termine della serie (4.1), pertanto la convergenza uniforme di quest'ultima segue dai ben noti criteri di convergenza sulle serie di funzioni.

Le ipotesi del Teorema 4.1 possono essere indebolite, ma la sola continuità di f non è sufficiente per la convergenza uniforme (esistono controesempi).

Prima di dimostrare il Teorema 4.1 è utile introdurre la seguente forma complessa della serie di Fourier, basata sulla formula di Eulero per l'esponenziale complessa,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy,$$

che conserva la proprietà notevole dell'esponenziale $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Nel seguito, se $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$ è una funzione a valori in $\mathbb{C}$, le operazioni di integrazione, derivazione, etc. vanno intese applicate per linearità alle parti reale ed immaginaria di F (ad esempio $F'(x) = F_1'(x) + iF_2'(x)$). In particolare, si verifica facilmente che

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Utilizzando le ovvie identità,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad x \in \mathbb{R},$$

possiamo riscrivere la serie di Fourier nella forma seguente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{in\frac{\pi}{L}x} + e^{-in\frac{\pi}{L}x} \right) - i \frac{b_n}{2} \left(e^{in\frac{\pi}{L}x} - e^{-in\frac{\pi}{L}x} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\frac{\pi}{L}x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\frac{\pi}{L}x} \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}, \end{aligned}$$

avendo definito

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Dunque la serie di Fourier si riscrive in termini di uno sviluppo mediante il sistema di funzioni trigonometriche complesse $\{e^{in\frac{\pi}{L}x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Si verifica immediatamente che tali funzioni soddisfano la relazione di ortogonalità,

$$\int_{-L}^L dx e^{in\frac{\pi}{L}x} e^{-ik\frac{\pi}{L}x} = \int_{-L}^L dx e^{i(n-k)\frac{\pi}{L}x} = 2L \delta_{n,k}, \quad (4.4)$$

da cui si ricava un'espressione diretta dei coefficienti c_n in termini di f ,

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Il Teorema 4.1 ammette la seguente formulazione equivalente.

TEOREMA 4.2. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica ed i coefficienti c_n definiti come in (4.5). Allora*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad (\text{uniformemente}).$$

Inoltre la convergenza è totale, nel senso che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty. \quad (4.6)$$

L'equivalenza tra le due formulazioni è ovvia. Si consideri in particolare che, essendo $|c_0| = \frac{1}{2}|a_0|$ e $|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ per $n \neq 0$, si ha

$$\frac{|a_n| + |b_n|}{2\sqrt{2}} \leq |c_{\pm n}| \leq \frac{|a_n| + |b_n|}{2},$$

cosicché le equazioni (4.3) e (4.6) sono equivalenti.

La dimostrazione del Teorema 4.2 segue da una serie di lemmi e proposizioni preliminari.

LEMMA 4.3 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica. Allora*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}$, si ha:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx [f(x) - S_N(x)]^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 - 2 \sum_{n=-N}^N c_n \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{in\frac{\pi}{L}x} \\
 &\quad + \frac{1}{2L} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k \int_{-L}^L dx e^{in\frac{\pi}{L}x} e^{ik\frac{\pi}{L}x} \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 - 2 \sum_{n=-N}^N c_n c_{-n} + \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k \delta_{n,-k} \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 - 2 \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.
 \end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2 \quad \forall N \geq 1,$$

che dimostra l'asserto. $\square$

COROLLARIO 4.4. Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica. Allora

$$|c_n| \leq \|f\|_\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. La stima $|c_n| \leq \|f\|_\infty$ segue immediatamente dalla (4.5), mentre il limite segue dalla disuguaglianza di Bessel, poiché i termini di una serie assolutamente convergente sono infinitesimi. $\square$

LEMMA 4.5. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica. Allora

$$c_n = \frac{L}{in} c_n^{(1)} \quad \text{dove} \quad c_n^{(1)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f'(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x}.$$

DIMOSTRAZIONE. Integrando per parti, per la periodicità di f ,

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{2L} f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} \Big|_{x=-L}^{x=L} + \frac{in\pi}{L} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} = \frac{i\pi n}{L} c_n.$$

$\square$

PROPOSIZIONE 4.6. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ è una funzione $2L$ -periodica allora i suoi coefficienti di Fourier soddisfano la (4.6).

DIMOSTRAZIONE. Dal precedente lemma ed usando la stima $pq \leq \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$,

$$|c_n| = \frac{L}{\pi n} |c_n^{(1)}| \leq \frac{L}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n^{(1)}|^2 \right).$$

Ma $f' \in C(\mathbb{R})$ per cui vale la disuguaglianza di Bessel e dunque il membro di destra è sommabile in n . $\square$

Rimane da dimostrare la convergenza puntuale ad $f(x)$ della sua serie di Fourier.

PROPOSIZIONE 4.7. *Sia $f \in C(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica. Supponiamo che esista la derivata $f'(y)$ in un punto $y \in \mathbb{R}$. Allora*

$$f(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \frac{\pi}{L} y}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che $y = 0$. Definiamo

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{e^{i \frac{\pi}{L} x} - 1}.$$

Si ha $g \in C(\mathbb{R})$ e $2L$ -periodica, purché per $x = 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$ le si assegni il valore

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{e^{i \frac{\pi}{L} x} - 1} = -\frac{iL}{\pi} f'(0).$$

In particolare i suoi coefficienti di Fourier $\tilde{c}_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx g(x) e^{-in \frac{\pi}{L} x}$ tendono a zero per $n \rightarrow \infty$.

D'altra parte, essendo $f(x) - f(0) = e^{i \frac{\pi}{L} x} g(x) - g(x)$,

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx [f(x) - f(0)] e^{-in \frac{\pi}{L} x} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx g(x) e^{-i(n-1) \frac{\pi}{L} x} - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx g(x) e^{-in \frac{\pi}{L} x},$$

ovvero $c_n - f(0)\delta_{n,0} = \tilde{c}_{n-1} - \tilde{c}_n$, da cui

$$\sum_{n=-N}^N c_n - f(0) = \sum_{n=-N}^N (\tilde{c}_{n-1} - \tilde{c}_n) = -\tilde{c}_N + \tilde{c}_{-N-1}.$$

Nel limite $N \rightarrow \infty$ troviamo

$$f(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n.$$

Se invece $y \neq 0$ allora poniamo $\psi(x) = f(x + y)$. Chiaramente $\psi \in C(\mathbb{R})$, è $2L$ -periodica ed esiste la derivata $\psi'(0) = f'(y)$. Dunque, per quanto sopra dimostrato,

$$f(y) = \psi(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{c}_n,$$

con

$$\begin{aligned} \hat{c}_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \psi(x) e^{-in \frac{\pi}{L} x} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x + y) e^{-in \frac{\pi}{L} x} \\ &= e^{in \frac{\pi}{L} y} \frac{1}{2L} \int_{-L+y}^{L+y} dx f(x) e^{-in \frac{\pi}{L} x} = e^{in \frac{\pi}{L} y} c_n. \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che se φ è una funzione $2L$ -periodica localmente integrabile allora $\int_{-L+y}^{L+y} dx \varphi(x) = \int_{-L}^L dx \varphi(x)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Dunque $f(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \frac{\pi}{L} y}$, il che dimostra la proposizione. $\square$

Il Teorema 4.2 è ora immediata conseguenza delle Proposizioni 4.6 e 4.7.

OSSERVAZIONE 4.1. Come già detto, le ipotesi del Teorema 4.2 possono essere indebolite. Ad esempio, è sufficiente che la funzione $2L$ -periodica f sia assolutamente continua e con derivata $f' \in L^2([-L, L])$. Inoltre, per la sola convergenza puntuale, si può dimostrare che se $f \in C(\mathbb{R})$ ed in un punto $x \in [-L, L]$ soddisfa la condizione di Dini

$$\exists \delta > 0: \int_{-\delta}^{\delta} dz \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| < +\infty$$

allora si ha convergenza della serie di Fourier in quel punto, ovvero

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \frac{\pi}{L} x}.$$

Conseguenza del Teorema 4.2 e del Lemma 4.5 è il seguente risultato.

TEOREMA 4.8. Sia $f \in C^k(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica, $k \geq 1$. Allora

$$f^{(r)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{i\pi n}{L} \right)^r c_n e^{in \frac{\pi}{L} x} \quad (\text{uniformemente}) \quad \forall r \leq k-1.$$

Inoltre,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{k-1} |c_n| < \infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $r \leq k-1$, indichiamo con $c_n^{(r)}$ i coefficienti di Fourier della derivata $f^{(r)}$. Dunque, applicando ricorsivamente il Lemma 4.5,

$$c_n = \left(\frac{L}{i\pi n} \right)^r c_n^{(r)} \iff c_n^{(r)} = \left(\frac{i\pi n}{L} \right)^r c_n.$$

Ma essendo $f^{(r)} \in C^1(\mathbb{R})$ si applica il Teorema 4.2. Pertanto vale la convergenza uniforme della serie di Fourier. Infine, per la convergenza totale di tale serie nel caso $r = k-1$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{k-1} |c_n| = \left(\frac{L}{\pi} \right)^{k-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^{(k-1)}| < \infty.$$

□

OSSERVAZIONE 4.2. Ovviamente un'analogia affermazione vale nella scrittura della serie di Fourier in termini di seni e coseni. In particolare, se $f \in C^k(\mathbb{R})$ è una funzione $2L$ -periodica,

$$\sum_{n \geq 1} n^{(k-1)} (|a_n| + |b_n|) < \infty. \quad (4.7)$$

OSSERVAZIONE 4.3. Poiché se $f \in C^1(\mathbb{R})$ si ha la convergenza uniforme della serie di Fourier ad f , per i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale possiamo affermare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dx [f(x) - S_N(x)]^2 = 0.$$

Pertanto, ripercorrendo la dimostrazione della disuguaglianza di Bessel, deduciamo che vale in realtà l'uguaglianza, ovvero

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x)^2.$$

In effetti si può dimostrare che tale relazione, detta *uguaglianza di Parseval*, sussiste purché f sia una funzione a quadrato integrabile sull'intervallo $[-L, L]$.

OSSERVAZIONE 4.4. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione $2L$ -periodica. Allora

1) Se f è una funzione dispari, $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

2) Se f è una funzione pari, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

Infatti, essendo nullo l'integrale di una funzione dispari su $[-L, L]$, si ha $a_n = 0$ nel primo caso e $b_n = 0$ nel secondo caso.

4.2. Il metodo di Fourier

Introduciamo qui il metodo di Fourier per determinare la soluzione dei problemi al contorno per la corda finita. Tale metodo si applica in generale a diversi problemi con condizioni al bordo omogenee.

4.2.1. Problema in dimensione finita. Per capire meglio quale sia l'idea di base, consideriamo dapprima il caso di un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti della forma

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), \\ u(0) = c, \end{cases}$$

dove $u(t) \in \mathbb{R}^n$ è la funzione incognita, $c \in \mathbb{R}^n$ il dato iniziale ed $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice simmetrica. Dunque l'operatore lineare $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è simmetrico rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ ($A\xi \cdot \eta = \xi \cdot A\eta \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$) e pertanto ammette n autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti) ed altrettanti autovettori $v_1, \dots, v_n$ tra loro ortogonali, che dunque formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$. Cerchiamo allora la soluzione del problema nella forma

$$u(t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) v_k.$$

Sostituendo nell'equazione e ricordando che $Av_k = \lambda_k v_k$, otteniamo

$$\sum_{k=1}^n [\dot{w}_k(t) - \lambda_k w_k(t)] v_k = 0, \quad \sum_k w_k(0) v_k = c.$$

Essendo $v_1, \dots, v_n$ una base ortogonale ne segue che deve aversi

$$\dot{w}_k(t) = \lambda_k w_k(t), \quad w_k(0) = \frac{c \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Chiaramente $w_k(t) = w_k(0)e^{\lambda_k t}$, cosicché la soluzione del problema è

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \frac{c \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} e^{\lambda_k t} v_k.$$

Si può procedere in questa maniera anche nel caso di un'equazione del secondo ordine,

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = Au(t), \\ u(0) = c, \quad \dot{u}(0) = C. \end{cases}$$

Nuovamente

$$u(t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) v_k,$$

dove le n funzioni scalari $w_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, sono in questo caso soluzioni delle equazioni differenziali del secondo ordine

$$\ddot{w}_k(t) = \lambda_k w_k(t), \quad w_k(0) = \frac{c \cdot v_k}{v_k \cdot v_k}, \quad \dot{w}_k(0) = \frac{C \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Ad esempio, nella teoria delle piccole oscillazioni affrontata nel corso di Meccanica Razionale si affronta il problema un po' più generale,

$$\begin{cases} T \ddot{u}(t) = Hu(t), \\ u(0) = c, \quad \dot{u}(0) = C, \end{cases}$$

con $T, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetriche e T definita positiva. Ma ponendo $z(t) = T^{1/2} u(t)$ ritroviamo

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = Az(t), \\ z(0) = \bar{c}, \quad \dot{z}(0) = \bar{C}, \end{cases}$$

con $A = T^{-1/2} H T^{-1/2}$, $\bar{c} = T^{1/2} c$, $\bar{C} = T^{1/2} C$.

4.2.2. Problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo. Vogliamo ora applicare la precedente strategia nel caso dell'equazione della corda. Consideriamo in particolare il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Il problema agli autovalori associato consiste nel determinare autovalori e relative autofunzioni dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$ sull'intervallo $[0, L]$ con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee. Dunque cerchiamo le coppie $(\lambda, v(x))$ tali che

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) & \text{se } x \in (0, L), \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Notiamo da subito che ciascuna soluzione è determinata a meno di un fattore moltiplicativo, nel senso che se $(\lambda, v(x))$ è soluzione di (4.9) allora lo è anche

$(\lambda, C v(x))$ con C una costante arbitraria (si pensi all'analogo finito dimensionale: se $\xi \in \mathbb{R}^n$ è autovettore della matrice A di autovalore λ allora lo è anche il vettore $C\xi$ con $C \in \mathbb{R}$).

Per risolvere il problema (4.9) notiamo che l'integrale generale dell'equazione $v''(x) = \lambda v(x)$ è

$$v(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0, \\ C_1 + C_2 x & \text{se } \lambda = 0, \\ C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) & \text{se } \lambda = -k^2 < 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

con C_1, C_2 costanti arbitrarie. Cerchiamo soluzioni non banali (cioè non identicamente nulle) del problema (4.9). Imponendo le condizioni al bordo $v(0) = v(L) = 0$ si verifica facilmente che se $\lambda \geq 0$ allora necessariamente $C_1 = C_2 = 0$, dunque tutte soluzioni banali. Nel caso invece $\lambda = -k^2$ la condizione $v(0) = 0$ implica $C_1 = 0$, cosicché $v(x) = C_2 \sin(kx)$ e per avere soluzioni non banali (cioè con $C_2 \neq 0$) è necessario che $\sin(kL) = 0$, ovvero che $k = \pm \frac{n\pi}{L}$ con n intero positivo. In definitiva, il problema agli autovalori (4.9) possiede il seguente insieme infinito di soluzioni,

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

dove abbiamo considerato solo il caso $k = \frac{n\pi}{L}$ poiché $k = -\frac{n\pi}{L}$ non fornisce altre soluzioni del problema essendo $\sin(-\frac{n\pi}{L}x) = -v_n(x)$.

Osserviamo che il sistema di funzioni $\{v_n(x)\}_{n \geq 1}$ su $[0, L]$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare tra funzioni definito da

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L dx u(x) v(x). \quad (4.11)$$

Infatti, da un calcolo esplicito,

$$\langle v_n, v_k \rangle = \frac{L}{2} \delta_{n,k},$$

Tale proprietà di ortogonalità è legata al fatto che l'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$ è simmetrico rispetto al prodotto scalare (4.11) nello spazio lineare delle funzioni due volte derivabili con continuità su $[0, L]$ che si annullano al bordo. Infatti, per una qualsiasi coppia u, v di tali funzioni, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \langle u'', v \rangle &= u'(L)v(L) - u'(0)v(0) - \langle u', v' \rangle = -\langle u', v' \rangle \\ &= u(L)v'(L) - u(0)v'(0) - \langle u', v' \rangle = \langle u, v'' \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Cerchiamo allora la soluzione formale del problema (4.8) nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) v_n(x),$$

cosicché le condizioni al bordo sono soddisfatte. Sostituendo nell'equazione della corda si ha

$$\sum_{n \geq 1} \ddot{W}_n(t) v_n(x) = - \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} W_n(t) v_n(x).$$

Fissato un qualunque intero $k \geq 1$, moltiplicando ambo i membri per $v_k(x)$ ed integrando da 0 ad L , utilizzando quindi l'ortogonalità delle funzioni $\{v_n(x)\}_{n \geq 1}$, segue che deve aversi

$$\ddot{W}_k(t) = -\omega_k^2 W_k(t), \quad \omega_k := \frac{k\pi c}{L},$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico, il cui integrale generale è

$$W_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t),$$

con A_k, B_k costanti arbitrarie. Pertanto

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (4.13)$$

Per determinare i coefficienti A_n e B_n dobbiamo imporre le condizioni iniziali. Poiché

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n \geq 1} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

dobbiamo richiedere che

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n \geq 1} B_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Nuovamente, fissato un qualunque intero $k \geq 1$, moltiplicando ambo i membri delle precedenti relazioni per $v_k(x)$ ed integrando da 0 ad L , utilizzando quindi l'ortogonalità delle funzioni $\{v_n(x)\}_{n \geq 1}$, segue che deve aversi

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L dx g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad B_k = \frac{2}{\omega_k L} \int_0^L dx h(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right).$$

Se indichiamo con $\tilde{g}(x)$ ed $\tilde{h}(x)$ le funzioni $2L$ -periodiche ottenute prolungando rispettivamente $g(x)$ ed $h(x)$ per disparità all'intervallo $[-L, L]$ e quindi per periodicità, si ha ovviamente

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \tilde{h}(x) = \sum_{n \geq 1} B_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

con A_n, B_n che possono scriversi anche nella forma

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \tilde{g}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad B_n = \frac{1}{\omega_n L} \int_{-L}^L dx \tilde{h}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Altrimenti detto, A_n e $\omega_n B_n$ sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier in serie di seni delle funzioni periodiche e dispari $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$. Affinché la soluzione formale trovata in forma di serie sia effettivamente derivabile termine a termine due volte rispetto alle variabili (x, t) e fornisca quindi una soluzione classica del problema è sufficiente che sia

$$\sum_{n \geq 1} (|A_n| + |B_n|) n^2 < +\infty. \quad (4.14)$$

Infatti ciascun termine di tale serie numerica domina, a meno di un fattore costante ininfluente, il modulo del corrispondente termine delle serie di funzioni ottenute derivando termine a termine due volte rispetto alle variabili (x, t) la

soluzione formale $u(x, t)$. Dall'Osservazione 4.2 sappiamo che una condizione sufficiente perché sussista la (4.14) è che siano $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R})$ e $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R})$, ovvero che $g \in C^3([0, L])$, $h \in C^2([0, L])$ ed inoltre

$$g(0) = g(L) = 0, \quad g''(0) = g''(L) = 0, \quad h(0) = h(L) = 0, \quad h''(0) = h''(L) = 0.$$

Si osservi che occorre assumere una regolarità dei dati iniziali maggiore rispetto a quella richiesta nel metodo delle riflessioni. Ciò poiché cerchiamo la soluzione u nella forma di una serie due volte derivabile termine a termine, dunque con regolarità maggiore della semplice richiesta che $u \in C^2((0, L) \times \mathbb{R}_+)$ sia una soluzione classica.

OSSERVAZIONE 4.5. Il metodo di Fourier è anche noto con il nome di *metodo della separazione delle variabili*. Infatti l'argomento può essere così riformulato. Cerchiamo soluzioni particolari nella forma di prodotto di funzioni delle singole variabili x e t , dunque $U(x, t) = v(x)W(t)$. Imponendo che U sia soluzione dell'equazione delle onde con le prescritte condizioni al bordo deve aversi

$$\begin{cases} v(x)\ddot{W}(t) - c^2 v''(x)W(t) = 0, \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

Laddove $v(x)W(t) \neq 0$ possiamo riscrivere la prima equazione nella forma

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{\ddot{W}(t)}{c^2 W(t)}.$$

Pertanto i due membri della precedente equazione devono essere indipendenti da entrambe le variabili x e t . Deve allora esistere una *costante di separazione*, che indichiamo con λ , tale che

$$v''(x) = \lambda v(x), \quad \ddot{W}(t) = c^2 \lambda W(t).$$

Ne segue che la coppia $(\lambda, v(x))$ deve risolvere il problema agli autovalori (4.9), del quale abbiamo dimostrato esistere l'infinità di soluzioni $\{(v_n(x), \lambda_n)\}_{n \geq 1}$. La corrispondente funzione $W(t) = W_n(t)$ deve allora risolvere l'equazione armonica $\ddot{W}_n(t) = c^2 \lambda_n W_n(t)$. Troviamo in tal modo un'infinità di soluzioni particolari $U_n(x, t) = W_n(t)v_n(x)$, ciascuna dipendente da due costanti arbitrarie (i dati iniziali $W_n(0)$ e $\dot{W}_n(0)$ dell'oscillatore armonico W_n). A questo punto si cerca la soluzione del problema di Cauchy (4.8) come sovrapposizione di tali soluzioni,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} U_n(x, t),$$

dove le $U_n(x, t)$ vengono univocamente determinate imponendo le condizioni iniziali. In queste note vedremo applicazioni di questo metodo per la risoluzione di diversi problemi di EDP.

OSSERVAZIONE 4.6. La formula (4.13) afferma che la soluzione dell'equazione della corda vibrante con estremi fissi si scrive come la sovrapposizione di infinite soluzioni particolari della forma

$$u_n(x, t) = N_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \left(\text{dove} \begin{cases} N_n \cos \varphi_n = A_n \\ N_n \sin \varphi_n = -B_n \end{cases} \right)$$

in cui riconosciamo un'onda stazionaria armonica di numero d'onda $k_n = \frac{n\pi}{L}$ e frequenza angolare ω_n . Se la corda evolve secondo $u_n(x, t)$, ciascun punto oscilla armonicamente con uguale fase φ_n ed ampiezza $|N_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)|$, in modo tale che tra i *nod*i dell'onda armonica (cioè i punti x in cui $u_n(x, t) = 0$ per ogni t) ci siano sempre gli estremi della corda. Dunque la soluzione generica si scrive come somma di un numero finito o infinito di onde armoniche stazionarie (o semplicemente *armoniche*), tra le quali distinguiamo la *fondamentale* $u_1(x, t)$ di frequenza ω_1 e le successive $u_n(x, t)$, $n \geq 2$, di frequenza $\omega_n = n\omega_1$ (ad esempio $u_2(x, t)$ è l'*ottava* della fondamentale). Il metodo di Fourier mette così in evidenza il carattere oscillatorio della propagazione ondosa, in particolare l'esistenza di infinite *vibrazioni proprie* di cui è costituita una generica vibrazione. È l'analogo della decomposizione in modi normali delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile in un sistema meccanico con un numero finito di gradi di libertà. Per inciso, si ricordi che l'equazione della corda vibrante è stata derivata proprio nell'approssimazione delle piccole oscillazioni.

OSSERVAZIONE 4.7. Abbiamo già notato che le autofunzioni $v_n(x)$ sono definite a meno di una costante moltiplicativa. In particolare, possiamo fissare tale costante in modo che esse abbiano norma unitaria rispetto al prodotto scalare definito in (4.11). Poniamo cioè

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

cosicché $\langle e_n, e_k \rangle = \delta_{n,k}$. Scriviamo quindi l'integrale generale del problema nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) e_n(x).$$

Chiaramente le funzioni $W_n(t)$ sono sempre moti armonici di pulsazione ω_n (la differenza nella scelta di $e_n(x)$ in luogo di $v_n(x)$ emerge solo quando si impongono le condizioni iniziali). Esiste ora un legame immediato tra l'energia meccanica di tali oscillatori e quella della corda vibrante. Precisamente,

$$E(t) = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \sum_{n \geq 1} E_n(t),$$

con

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \dot{W}_n(t)^2 + \frac{\omega_n^2}{2} W_n(t)^2$$

l'energia dell'oscillatore n -esimo. In effetti,

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle + \frac{c^2}{2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle \\ &= \sum_{n,k \geq 1} \left[\frac{1}{2} \dot{W}_n \dot{W}_k \langle e_n, e_k \rangle + \frac{c^2}{2} W_n W_k \langle e'_n, e'_k \rangle \right], \end{aligned}$$

da cui segue il risultato poiché

$$\langle e_n, e_k \rangle = \delta_{n,k}, \quad \langle e'_n, e'_k \rangle = -\langle e''_n, e_k \rangle = -\lambda_n \langle e_n, e_k \rangle = \frac{\omega_n^2}{c^2} \delta_{n,k}.$$

ESERCIZIO 4.1. Stabilire se esistono condizioni iniziali per il problema di Cauchy-Dirichlet (4.8) che danno luogo a moti periodici nel tempo (ovvero se esistono soluzioni $u(x, t)$ non nulle tali che $u(x, t) = u(x, t + T)$ per un qualche $T > 0$ e per ogni x, t).

ESERCIZIO 4.2. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

Inoltre, se è una soluzione periodica nel tempo, stabilirne il periodo.

ESERCIZIO 4.3. Verificare che le soluzioni del problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo trovate con il metodo delle riflessioni e con il metodo di Fourier coincidono (almeno formalmente). Altrimenti detto, verificare che i membri di destra delle (3.25) e (4.13) coincidono per assegnati dati iniziali g ed h .

4.3. Esempi di applicazione del metodo di Fourier

4.3.1. Problema di Cauchy-Neumann omogeneo. Consideriamo il problema di Cauchy-Neumann omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

In questo caso il problema agli autovalori associato consiste nel determinare autovalori e relative autofunzioni dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$ sull'intervallo $[0, L]$ con condizioni al bordo di Neumann omogenee. Dunque cerchiamo le coppie $(\lambda, v(x))$ tali che

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) & \text{se } x \in (0, L), \\ v'(0) = v'(L) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Per risolvere il problema (4.16) partiamo dall'integrale generale (4.10) da cui si ricava

$$v'(x) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) & \text{se } \lambda > 0, \\ C_2 & \text{se } \lambda = 0, \\ k[-C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)] & \text{se } \lambda = -k^2 < 0. \end{cases}$$

Cerchiamo soluzioni non banali (cioè non identicamente nulle) del problema (4.16). Imponendo le condizioni al bordo $v'(0) = v'(L) = 0$ si verifica facilmente che se $\lambda > 0$ allora necessariamente $C_1 = C_2 = 0$, dunque tutte soluzioni banali. Nel caso $\lambda = 0$ abbiamo $C_2 = 0$ e C_1 arbitrario. Infine, se $\lambda = -k^2$ la condizione

$v'(0) = 0$ implica $C_2 = 0$, cosicché $v(x) = C_1 \cos(kx)$ e per avere soluzioni non banali (cioè con $C_1 \neq 0$) è necessario che $\sin(kL) = 0$, ovvero che $k = \pm \frac{n\pi}{L}$ con n intero positivo. In definitiva il problema agli autovalori (4.16) possiede il seguente insieme infinito di soluzioni,

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad v_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dove ora è incluso l'autovalore nullo $\lambda_0 = 0$ che ha come autofunzione non banale $v_0(x) = 1$. Abbiamo considerato solo il caso $k = \frac{n\pi}{L}$ poiché $k = -\frac{n\pi}{L}$ non fornisce altre soluzioni del problema essendo $\cos(-\frac{n\pi}{L}x) = v_n(x)$.

Osserviamo che il sistema di funzioni $\{v_n(x)\}_{n \geq 0}$ su $[0, L]$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare (4.11). Infatti, da un calcolo esplicito,

$$\langle v_n, v_k \rangle = \frac{L}{2} \delta_{n,k} (1 + \delta_{n,0}).$$

Anche in questo caso, l'ortogonalità è legata alla simmetria dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$ sullo spazio lineare delle funzioni due volte derivabili con continuità su $[0, L]$ e soddisfacenti condizioni di Neumann omogenee al bordo. Infatti l'indeterminatezza (4.12) sussiste anche per una coppia di tali funzioni.

Possiamo ora procedere come nel caso del problema di Dirichlet. Cerchiamo la soluzione formale del problema (4.15) nella forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} W_0(t) + \sum_{n \geq 1} W_n(t) v_n(x),$$

cosicché le condizioni al bordo sono soddisfatte. Sostituendo nell'equazione della corda si ha

$$\frac{1}{2} \ddot{W}_0(t) + \sum_{n \geq 1} \ddot{W}_n(t) v_n(x) = - \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} W_n(t) v_n(x).$$

Fissato un qualunque intero $k \geq 0$, moltiplicando ambo i membri per $v_k(x)$ ed integrando da 0 ad L , utilizzando quindi l'ortogonalità delle funzioni $\{v_n(x)\}_{n \geq 0}$, segue che deve aversi

$$\ddot{W}_k(t) = -\omega_k^2 W_k(t), \quad \omega_k := \frac{k\pi c}{L},$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico se $k \geq 1$ e del moto libero se $k = 0$. Pertanto

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (A_0 + B_0 t) + \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Per determinare i coefficienti A_n e B_n dobbiamo imporre le condizioni iniziali. Poiché

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n \geq 1} [-A_n \omega_n \sin(\omega_n t) + B_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

dobbiamo richiedere che

$$g(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad h(x) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n \geq 1} B_n \omega_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Nuovamente, fissato un qualunque intero $k \geq 1$, moltiplicando ambo i membri delle precedenti relazioni per $\nu_k(x)$ ed integrando da 0 ad L , utilizzando quindi l'ortogonalità delle funzioni $\{\nu_n(x)\}_{n \geq 0}$, segue che deve aversi

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L dx g(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \geq 0,$$

$$B_k = \begin{cases} \frac{2}{L} \int_0^L dx h(x) & \text{se } k = 0, \\ \frac{2}{\omega_k L} \int_0^L dx h(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

Se indichiamo con $\tilde{g}(x)$ ed $\tilde{h}(x)$ le funzioni $2L$ -periodiche ottenute prolungando rispettivamente $g(x)$ ed $h(x)$ per parità all'intervallo $[-L, L]$ e quindi per periodicità, si ha ovviamente

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n \geq 1} B_n \omega_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

con A_n, B_n che possono scriversi anche nella forma

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \tilde{g}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 0,$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \tilde{h}(x) & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{\omega_n L} \int_{-L}^L dx \tilde{h}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Altrimenti detto, A_n e $B_0, \omega_n B_n$ sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier in serie di coseni delle funzioni periodiche e pari $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$. Anche in questo caso, affinché la soluzione formale trovata in forma di serie sia effettivamente derivabile termine a termine due volte rispetto alle variabili (x, t) e fornisca quindi una soluzione classica del problema è sufficiente che sia soddisfatta la condizione (4.14). Infatti ciascun termine di tale serie numerica domina, a meno di un fattore costante ininfluente, il modulo del corrispondente termine delle serie di funzioni ottenute derivando termine a termine due volte rispetto alle variabili (x, t) la soluzione formale $u(x, t)$. Dall'Osservazione 4.2 sappiamo che una condizione sufficiente perché sussista la (4.14) è che siano $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R})$ e $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R})$, ovvero che $g \in C^3([0, L])$, $h \in C^2([0, L])$ ed inoltre

$$g'(0) = g'(L) = 0, \quad g'''(0) = g'''(L) = 0, \quad h'(0) = h'(L) = 0.$$

Notiamo che, analogamente al caso del problema di Cauchy-Dirichlet, poiché cerchiamo la soluzione u nella forma di una serie due volte derivabile termine a termine, occorre assumere una regolarità dei dati iniziali maggiore rispetto a quanto richiesto nel metodo delle riflessioni.

ESERCIZIO 4.4. Risolvere, con il metodo di Fourier, il problema di Cauchy con condizioni periodiche per l'equazione delle onde,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + L, t) & \text{per } x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{cases}$$

4.3.2. Vibrazioni forzate. Studiamo ora le vibrazioni forzate di una corda, ad esempio con estremi fissati, dunque il problema di Cauchy-Dirichlet,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

Come nel caso della corda infinita, è sufficiente determinare la soluzione particolare corrispondente a dati iniziali nulli, poiché il problema con g ed h generici si ottiene sommando a tale soluzione quella del problema non forzato con i suddetti dati iniziali. Pertanto studiamo il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Come nel caso delle vibrazioni libere, cerchiamo la soluzione nella forma di uno sviluppo in serie di seni,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Supponiamo inoltre che sia ben definito lo sviluppo in serie di seni della forzante,

$$f(x, t) = \sum_{n \geq 1} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dy f(y, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

(quindi lo sviluppo del prolungamento dispari di $f(x, t)$ su $[-L, L]$). Sostituendo nell'equazione si ha

$$\sum_{n \geq 1} \ddot{W}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n \geq 1} \left[-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} W_n(t) + f_n(t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

cui vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$\sum_{n \geq 1} W_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n \geq 1} \dot{W}_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0.$$

Per l'unicità dello sviluppo di Fourier concludiamo che le $\{W_n(t)\}_{n \geq 1}$ devono soddisfare le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{W}_n(t) = -\omega_n^2 W_n(t) + f_n(t) \\ W_n(0) = \dot{W}_n(0) = 0 \end{cases} \quad \omega_n := \frac{n\pi c}{L},$$

in cui riconosciamo degli oscillatori armonici di frequenze ω_n con forzante $f_n(t)$. Anche in questo caso di un'equazione differenziale ordinaria possiamo ottenerne la soluzione con il metodo di Duhamel (in questo ambito detto "metodo della variazione delle costanti"). Consideriamo pertanto i problemi omogenei

$$\begin{cases} \ddot{W}(t) = -\omega_n^2 W(t) & t > s, \\ W(s) = 0 \quad \dot{W}(s) = f_n(s) & s \geq 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$W_n(t; s) = \frac{f_n(s)}{\omega_n} \sin[\omega_n(t - s)].$$

La soluzione cercata è allora

$$W_n(t) = \int_0^t ds W_n(t; s) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t ds f_n(s) \sin[\omega_n(t - s)],$$

ovvero, ricordando la definizione di $f_n(t)$,

$$W_n(t) = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^t ds \int_0^L dy f(y, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \sin[\omega_n(t - s)].$$

Il metodo si applica ovviamente anche in problemi con differenti condizioni al bordo omogenee, cercando la soluzione nella forma $u(x, t) = \sum_n W_n(t) v_n(x)$, con $\{v_n(x)\}$ il sistema di autofunzioni del corrispondente problema agli autovalori.

ESERCIZIO 4.5. Studiare le vibrazioni forzate di una corda finita con condizioni di Neumann omogenee agli estremi,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases}$$

ESERCIZIO 4.6. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy-Neumann relativa all'Esercizio 4.5 nel caso in cui la forzante è $f = f(x, t) = 1 + e^{-t} \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right)$.

ESERCIZIO 4.7. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy-Dirichlet non omogeneo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\pi x) & \text{in } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 4 \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin(2\pi x) & \text{per } x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

4.3.3. Problema misto. Consideriamo il problema di Cauchy misto omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso il problema agli autovalori associato consiste nel determinare autovalori e relative autofunzioni dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$ sull'intervallo $[0, L]$ con condizioni miste omogenee. Dunque cerchiamo le coppie $(\lambda, v(x))$ tali che

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) & \text{se } x \in (0, L), \\ v'(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

Ragionando come nei casi precedenti è facile verificare che le uniche soluzioni non banali si hanno se $\lambda = -k^2 < 0$. In tal caso l'integrale generale è $v(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$, per cui le condizioni $v'(0) = v(L) = 0$ si scrivono $C_2 = 0$ e $C_1 \cos(kL) = 0$, da cui si ricava che si hanno soluzioni non banali ($C_1 \neq 0$) solo se $\cos(kL) = 0$, ovvero $k = \pm \frac{(2n+1)\pi}{2L}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. In definitiva, scartando al solito i valori negativi di k che non danno luogo ad ulteriori soluzioni,

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4L^2}, \quad v_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A questo punto si procede analogamente ai casi precedenti, per cui, posto $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2L}$, la soluzione si cerca nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right),$$

dove i coefficienti A_n e B_n sono fissati dai dati iniziali, ovvero devono soddisfare

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \quad h(x) = \sum_{n \geq 0} B_n \omega_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right).$$

Notiamo che ora le somme a destra sono delle funzioni $4L$ -periodiche. Precisamente, se indichiamo con $\tilde{g}(x)$ ed $\tilde{h}(x)$ le funzioni $4L$ -periodiche ottenute prolungando rispettivamente $g(x)$ ed $h(x)$ per parità all'intervallo $[-L, L]$, quindi per disparità all'intervallo $[-L, 3L]$ ed infine per periodicità, si ha ovviamente, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \quad \tilde{h}(x) = \sum_{n \geq 0} B_n \omega_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right),$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx g(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) = \frac{1}{2L} \int_{-2L}^{2L} dx \tilde{g}(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right), \\ B_n &= \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L dx h(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right) = \frac{1}{2\omega_n L} \int_{-2L}^{2L} dx \tilde{h}(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right). \end{aligned}$$

Altrimenti detto, A_n e $\omega_n B_n$ sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier in serie di coseni delle funzioni $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$, $4L$ periodiche, pari attorno a $x = 0$ e dispari attorno a $x = L$. Affinché la soluzione formale trovata in forma di serie sia effettivamente derivabile termine a termine due volte rispetto alle variabili (x, t) e fornisca quindi una soluzione classica del problema è sufficiente che siano $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R})$ e $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R})$, ovvero che $g \in C^3([0, L])$, $h \in C^2([0, L])$ ed inoltre

$$g'(0) = g'''(0) = 0, \quad g(L) = g''(L) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h(L) = h''(L) = 0.$$

4.3.4. Condizioni al bordo non omogenee. Il metodo di Fourier, al pari di quello delle riflessioni, si applica al caso di condizioni al bordo omogenee. D'altra parte in taluni casi è possibile ricondurre un problema con dati al bordo non omogenei al caso di dati omogenei. Precisamente, consideriamo condizioni al bordo indipendenti dal tempo del tipo

- i) $u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b;$
- ii) $u(0, t) = a, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta;$
- iii) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad u(L, t) = b;$
- iv) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta.$

e cerchiamo una soluzione stazionaria $\bar{u}(x)$ dell'equazione delle onde omogenea, dunque $\bar{u}''(x) = 0$. Essendo $\bar{u}(x) = c_1 + c_2 x$ l'integrale generale, troviamo un'unica $\bar{u}(x)$ nei casi i), ii), iii), mentre nel caso iv) ne troviamo infinite per $\alpha = \beta$ e nessuna per $\alpha \neq \beta$. Nei casi in cui esiste $\bar{u}(x)$ possiamo considerare la funzione $U(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x)$, che risolve il problema con dati al bordo omogenei e dati iniziali $U(x, 0) = g(x) - \bar{u}(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = h(x)$. Determinata $U(x, t)$ con il metodo di Fourier troviamo infine la soluzione $u(x, t)$ del problema con dati al bordo non omogenei.

ESERCIZIO 4.8. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy misto con dati al bordo non omogenei,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = x - L + \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1, \quad u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

4.3.5. Equazione delle onde generalizzata. Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

con $\gamma > 0$ (cfr. l'Eq. (3.8)). Osserviamo che l'operatore differenziale $\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \text{Id}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee ammette lo stesso sistema di autofunzioni dell'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$, semplicemente con autovalori traslati di α . Cerchiamo pertanto anche in questo caso la soluzione $u(x, t)$ come sovrapposizione di seni,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Sostituendo nell'equazione del moto si ha

$$\sum_{n \geq 1} \ddot{W}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n \geq 1} \left[-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \gamma \right] W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

da cui, per l'ortogonalità dei seni, deve aversi, per ciascun intero $n \geq 1$,

$$\ddot{W}_n(t) = -\left[\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \gamma\right] W_n(t),$$

che è ancora un sistema di oscillatori armonici. Dunque

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

dove $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \gamma}$, mentre i coefficienti sono determinati dai dati iniziali,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L dx h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

La differenza principale con il caso $\gamma = 0$ dell'equazione d'onda non generalizzata è che ora le armoniche in generale non sono più tra loro commensurabili (ovvero $\frac{\omega_n}{\omega_k} \notin \mathbb{Q}$ per $n \neq k$).

ESERCIZIO 4.9. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy-Dirichlet,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u - \beta \frac{\partial u}{\partial t} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases} \quad (4.19)$$

con $\gamma, \beta > 0$ (cfr. l'Esercizio 3.1). Dimostrare inoltre che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0.$$

[Suggerimento: Cercare la soluzione nella forma $u(x, t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} U(x, t)$.]

4.4. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 4.2. Dalla teoria sappiamo che la soluzione del problema si scrive nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

dove

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L dx h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con $g(x) = u(x, 0)$, $h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ e $\omega_n = (n\pi c)/L$. Nel caso in esame le funzioni g ed h sono proporzionali rispettivamente alla terza ed alla quinta armonica, per cui solo i coefficienti A_3 e B_5 sono diversi da zero. Più precisamente, utilizzando la formule di ortogonalità delle autofunzioni,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx 3 \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{6}{L} \frac{L}{2} \delta_{n,3} = 3\delta_{n,3}, \\ B_n &= \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{2}{\omega_n L} \frac{L}{2} \delta_{n,5} = \frac{1}{\omega_5} \delta_{n,5} = \frac{L}{5\pi c} \delta_{n,5}. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione del problema è

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_3 \cos(\omega_3 t) \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + B_5 \sin(\omega_5 t) \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) \\ &= 3 \cos\left(\frac{3\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \frac{L}{5\pi c} \sin\left(\frac{5\pi c}{L}t\right) \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

La soluzione è periodica ed il suo periodo, ovvero il più piccolo $T > 0$ per cui $u(x, t) = u(x, t + T)$, è $T = 2L/c$.

SOLUZIONE ES. 4.5. Cercando la soluzione nella forma

$$u(x, t) = \frac{W_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} W_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

e supponendo che sia ben definito lo sviluppo in serie di coseni della forzante,

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} f_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dy f(y, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right),$$

si trova che le $\{W_n(t)\}_{n \geq 0}$ devono soddisfare le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{W}_n(t) = -\omega_n^2 W_n(t) + f_n(t) \\ W_n(0) = \dot{W}_n(0) = 0 \end{cases} \quad \omega_n := \frac{n\pi c}{L},$$

da cui

$$W_n(t) = \begin{cases} \int_0^t ds (t-s) f_0(s) & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t ds \sin[\omega_n(t-s)] f_n(s) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE ES. 4.6. Nel caso in esame $f(x, t)$ è la somma di una costante e di una funzione proporzionale alla prima armonica, per cui solo i coefficienti

$f_0(t)$ e $f_1(t)$ sono diversi da zero. Più precisamente, utilizzando la formule di ortogonalità delle autofunzioni,

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dx \left[1 + e^{-t} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 2\delta_{n,0} + e^{-t}\delta_{n,1},$$

ovvero, più esplicitamente,

$$f_n(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0, \\ e^{-t} & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Pertanto

$$W_n(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } n = 0, \\ \frac{1}{\omega_1} \int_0^t ds \sin[\omega_1(t-s)]e^{-s} & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

L'integrale che determina $W_1(t)$ si può calcolare nel modo seguente. Eseguendo la sostituzione $\tau = t - s$ si ha

$$\frac{1}{\omega_1} \int_0^t ds \sin[\omega_1(t-s)]e^{-s} = \frac{e^{-t}}{\omega_1} \int_0^t d\tau e^{\tau} \sin(\omega_1 \tau).$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau e^{\tau} \sin(\omega_1 \tau) &= \Im \int_0^t d\tau e^{(1+i\omega_1)\tau} = \Im \frac{e^{(1+i\omega_1)t} - 1}{1 + i\omega_1} \\ &= \frac{e^t \sin(\omega_1 t) - \omega_1 e^t \cos(\omega_1 t) + \omega_1}{1 + \omega_1^2}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\frac{1}{\omega_1} \int_0^t ds \sin[\omega_1(t-s)]e^{-s} = \frac{1}{1 + \omega_1^2} \left[\frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \cos(\omega_1 t) + e^{-t} \right].$$

In conclusione, ricordando che $\omega_1 = \pi c/L$, la soluzione del problema è

$$u(x, t) = \frac{t^2}{2} + \frac{L^2}{L^2 + \pi^2 c^2} \left[\frac{L}{\pi c} \sin\left(\frac{\pi c}{L}t\right) - \cos\left(\frac{\pi c}{L}t\right) + e^{-t} \right] \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

SOLUZIONE ES. 4.7. La soluzione si scrive nella forma

$$u(x, t) = U(x, t) + u^*(x, t)$$

con $U(x, t)$ soluzione dell'equazione omogenea associata e $u^*(x, t)$ soluzione particolare di dati iniziali nulli che determiniamo con il metodo della variazione delle costanti. Posto $\omega_n = n\pi c$, la soluzione U si scrive nella forma

$$U(x, t) = \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(n\pi x),$$

$$A_n = 2 \int_0^1 dx g(x) \sin(n\pi x), \quad B_n = \frac{2}{\omega_n} \int_0^1 dx h(x) \sin(n\pi x).$$

Ma essendo $g(x) = 4\sin(\pi x)$, $h(x) = \sin(2\pi x)$ autofunzioni (prima e seconda armonica), solo A_1 e B_2 sono diversi da zero:

$$A_n = 2 \int_0^1 dx 4 \sin(\pi x) \sin(n\pi x) = 4\delta_{n,1},$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^1 dx \sin(2\pi x) \sin(n\pi x) = \frac{1}{2\pi c} \delta_{n,2}.$$

Quindi

$$U(x, t) = 4 \cos(\pi c t) \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi c} \sin(2\pi c t) \sin(2\pi x).$$

La soluzione u^* è invece

$$u^*(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) \sin(n\pi x)$$

con

$$W_n(t) = \frac{2}{\omega_n} \int_0^t ds \int_0^1 dy f(y, t) \sin(n\pi y) \sin[\omega_n(t-s)].$$

Ma $f(y, t) = \sin(\pi y)$ per cui solo $W_1(t)$ è diverso da zero, precisamente:

$$W_1(t) = \frac{1}{\pi c} \int_0^t ds \sin[\pi c(t-s)] = \frac{1}{\pi^2 c} [1 - \cos(\pi c t)].$$

La soluzione del problema è quindi

$$u(x, t) = \left[\frac{1}{\pi^2 c} + \left(4 - \frac{1}{\pi^2 c} \right) \cos(\pi c t) \right] \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi c} \sin(2\pi c t) \sin(2\pi x).$$

SOLUZIONE ES. 4.8. Vogliamo ricondurci ad un problema misto con dati al bordo omogenei che sappiamo risolvere con il metodo di Fourier. A tal scopo è sufficiente cercare la soluzione nella forma $u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t)$, dove $\bar{u}$ è la soluzione del problema stazionario con i dati al bordo non omogenei assegnati, ovvero $\bar{u}$ risolve

$$\begin{cases} \bar{u}''(x) = 0 & \text{in } (0, L), \\ \bar{u}'(0) = 1, \quad \bar{u}(L) = 0. \end{cases}$$

Infatti $\bar{u}$ è nota, essendo il segmento di retta di coefficiente angolare pari ad uno e passante per il punto $(L, 0)$, dunque $\bar{u}(x) = x - L$, mentre la funzione incognita $v(x, t)$ è soluzione del problema misto omogeneo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ v(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

Da quanto visto nella sottosezione 4.3.3 sappiamo che la soluzione di questo problema si scrive nella forma

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 0} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right),$$

dove

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx g(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right),$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L dx h(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right),$$

con $g(x) = v(x, 0)$, $h(x) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0)$ e $\omega_n = (2n+1)\pi c/(2L)$. Poiché nel nostro caso le funzioni g ed h sono proporzionali rispettivamente all'armonica per $n = 0$ ed $n = 1$, solo i coefficienti A_0 e B_1 sono diversi da zero, precisamente $A_0 = 1$ e $B_1 = \omega_1^{-1}$. Dunque

$$v(x, t) = \cos(\omega_0 t) \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) + \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right).$$

In conclusione la soluzione del problema è

$$u(x, t) = x - L + \cos\left(\frac{\pi c}{2L}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) + \frac{2L}{3\pi c} \sin\left(\frac{3\pi c}{2L}t\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right).$$

SOLUZIONE ES. 4.9. Cerchiamo la soluzione nella forma $u(x, t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} U(x, t)$ e riscriviamo il problema nella funzione incognita $U(x, t)$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\beta}{2} e^{-\frac{\beta}{2}t} U + e^{-\frac{\beta}{2}t} \frac{\partial U}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\beta^2}{4} e^{-\frac{\beta}{2}t} U - \beta e^{-\frac{\beta}{2}t} \frac{\partial U}{\partial t} + e^{-\frac{\beta}{2}t} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-\frac{\beta}{2}t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Si osservi che, in particolare,

$$g(x) = u(x, 0) = U(x, 0), \quad h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\beta}{2} g(x) + \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0).$$

Sostituendo nel sistema (4.19), deduciamo che $u(x, t)$ è soluzione di (4.19) se e solo se $U(x, t)$ risolve il problema,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right) U & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ U(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = h(x) + \frac{\beta}{2} g(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ U(0, t) = U(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases}$$

che può essere risolto analogamente a quanto fatto per il problema (4.18). Cerchiamo quindi $U(x, t)$ come sovrapposizione di seni,

$$U(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

cosicché le condizioni al bordo sono soddisfatte ed il problema nelle W_n si separa. Infatti, sostituendo nell'equazione del moto si ha

$$\sum_{n \geq 1} \ddot{W}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta^2}{4} - \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} - \gamma\right) W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

da cui, per l'ortogonalità dei seni, deve aversi, per ciascun intero $n \geq 1$,

$$\ddot{W}_n(t) = \beta_n W_n(t), \quad \beta_n := \frac{\beta^2}{4} - \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} - \gamma.$$

La soluzione dell'equazione dipende dal segno di β_n , precisamente,

$$W_n(t) = \begin{cases} A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) & \text{se } \beta_n = -\omega_n^2 < 0, \\ A_n + B_n t & \text{se } \beta_n = 0, \\ A_n e^{\sqrt{\beta_n} t} + B_n e^{-\sqrt{\beta_n} t} & \text{se } \beta_n > 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Le costanti A_n e B_n si determinano imponendo le condizioni iniziali e sono legate ai coefficienti dello sviluppo in serie di seni delle funzioni $g(x)$ e $h(x)$. Osserviamo che la condizione $\beta_n \geq 0$ si scrive

$$\frac{\beta^2}{4} \geq \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} + \gamma.$$

Pertanto essa può essere verificata al più da un numero finito di interi n , dopodiché tutti gli altri modi sono oscillatori armonici. Si osservi inoltre che laddove $\beta_n > 0$ si ha necessariamente $\sqrt{\beta_n} < \beta/2$, cosicché da (4.20) segue che se $\beta > 0$ allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{\beta}{2}t} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0.$$

Quindi, in presenza di attrito, le oscillazioni della corda si smorzano ed essa tende all'equilibrio per $t \rightarrow +\infty$.

Introduzione alla teoria delle distribuzioni

5.1. Premessa

Come discusso in Sezione 3.5, la *funzione δ di Dirac* in $x = y$ non è una funzione nel senso usuale: è un modo di indicare il funzionale lineare su $C(\mathbb{R})$ che associa alla funzione $\psi \in C(\mathbb{R})$ il suo valore in $x = y$:

$$\int dx \delta_y(x) \psi(x) = \psi(y).$$

Quindi “ $dx \delta_y(x)$ ” è una notazione per la “misura unitaria” $\mu_y(dx)$ concentrata nel punto y , cui si associa il funzionale lineare continuo $\delta_y: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definito dalla media integrale

$$\delta_y(\psi) = \int \mu_y(dx) \psi(x) = \psi(y) \quad \psi \in C(\mathbb{R}).$$

Si osservi che la misura $\mu_y(dx)$ non è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue dx . In particolare, $\delta_y(x)$ non è la densità di Radon-Nikodym e non può essere quindi interpretata come una funzione integrabile. Abbiamo già osservato in effetti che questo porterebbe all'ovvia contraddizione (3.20), come discusso in Sezione 3.5.

Quindi la “funzione generalizzata” δ_y di Dirac identifica una misura, ma è stata caratterizzata come un *funzionale lineare continuo* su $C(\mathbb{R})$.¹

Questo punto di vista è alla base della definizione di *funzione generalizzata* (detta anche *distribuzione*), ovvero come funzionale lineare continuo su un opportuno spazio di funzioni (dette *funzioni di prova*, *funzioni test* o *funzioni fondamentali*).

Le funzioni di prova devono essere sufficientemente regolari per poter (i) avere una classe ampia di funzionali lineari continui; (ii) sviluppare un calcolo differenziale su tali funzionali.

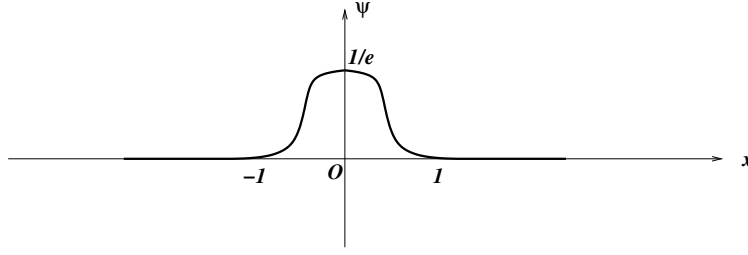
5.2. Spazio delle funzioni fondamentali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $C_0^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni complesse di classe C^∞ a supporto compatto in Ω :²

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\psi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(\psi) \text{ è un compatto in } \Omega\}.$$

¹È continuo in quanto limitato: $|J_{\delta_y}(\psi)| \leq \|\psi\|_\infty$.

²Il supporto di ψ è $\text{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \Omega : \psi(x) \neq 0\}}$.

FIGURA 5.1. Un esempio di funzione fondamentale in $\mathbb{R}$.

L'insieme $C_0^\infty(\Omega)$ ha la struttura di spazio lineare su $\mathbb{C}$ ponendo

$$(c_1\psi_1 + c_2\psi_2)(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Se $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ scriviamo inoltre

- (i) $\psi = \Re\psi + i\Im\psi$ con $\Re\psi, \Im\psi$ funzioni reali (quindi $\Re\psi, \Im\psi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$);
- (ii) $\|\psi\|_\infty = \sup_x |\psi(x)|$ dove $|\psi(x)|$ è il modulo del numero complesso $\psi(x) = \Re\psi(x) + i\Im\psi(x)$;
- (iii) $D^\alpha\psi(x) = D^\alpha\Re\psi(x) + iD^\alpha\Im\psi(x)$ dove, per ogni multi-indice di interi positivi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

DEFINIZIONE 5.1 (Spazio delle funzioni fondamentali su Ω). *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni fondamentali (dette anche funzioni di prova o funzioni test) sul dominio Ω è lo spazio lineare topologico definito dallo spazio lineare $C_0^\infty(\Omega)$ dotato della seguente forma di convergenza: la successione $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se*

(a) *esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\text{supp}(\psi_k) \subset K \quad \forall k \in \mathbb{N}$;*

(b) *per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ si ha*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D^\alpha\psi_k - D^\alpha\psi\|_\infty = 0.$$

ESEMPIO 5.1. Consideriamo la funzione reale

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Figura 5.1. Chiaramente $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$: infatti per $|x| < 1$ si ha

$$\frac{d^k\psi}{dx^k}(x) = \frac{Q_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

con $Q_k(x)$ un polinomio, per cui $\frac{d^k\psi}{dx^k}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm 1^-$ e $x \rightarrow \pm 1^+$.

Osserviamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio lineare topologico, in quanto le operazioni di somma e prodotto per uno scalare sono banalmente continue. Inoltre $\mathcal{D}(\Omega)$ contiene “molte funzioni”. In effetti, si può dimostrare il seguente teorema di densità, che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA 5.2. *L'insieme $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$:*

$$\forall f \in L^p(\Omega) \quad \exists \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega) : \lim_{k \rightarrow +\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0.$$

5.3. Spazio delle distribuzioni

Possiamo ora introdurre il concetto di distribuzione.

DEFINIZIONE 5.3. *Una distribuzione (o funzione generalizzata) su Ω è un funzionale lineare continuo $J: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$. Indichiamo con $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'insieme delle distribuzioni.*

Quindi, $J: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ è una distribuzione se:

- (i) $J(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1J(\psi_1) + c_2J(\psi_2)$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- (ii) $\psi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ per $k \rightarrow +\infty$ implica $J(\psi_k) \rightarrow 0$.³

Una notazione equivalente che utilizzeremo in seguito per $J(\psi)$ è nella forma di *crochet*:

$$J(\psi) = \langle J, \psi \rangle \quad (J \text{ contro } \psi).$$

La proprietà di continuità può essere espressa in termini di una proprietà di limitatezza. Sussiste infatti il seguente risultato (che non dimostriamo).

TEOREMA 5.4. *Un funzionale lineare $J: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene a $\mathcal{D}'(\Omega)$ se e solo se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono una costante $C > 0$ ed un intero $N \geq 0$ tali che*

$$|\langle J, \psi \rangle| \leq C \max_{|\alpha|=0, \dots, N} \|D^\alpha \psi\|_\infty \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp}(\psi) \subseteq K.$$

Altrimenti detto, per tutte le funzioni test ψ nulle al di fuori di un assegnato compatto K , il valore di $\langle J, \psi \rangle$ è controllato in termini delle derivate di ψ fino ad un certo ordine N .

DEFINIZIONE 5.5. *Una distribuzione $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è detta di ordine finito se N può essere scelto indipendente da K . Il più piccolo di tali N viene detto ordine della distribuzione.*⁴

Notiamo che $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio duale topologico di $\mathcal{D}(\Omega)$, dotato anch'esso di struttura lineare definendo, per ogni $J_1, J_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$,

$$\langle c_1 J_1 + c_2 J_2, \psi \rangle = c_1 \langle J_1, \psi \rangle + c_2 \langle J_2, \psi \rangle.$$

³Poiché J è lineare è sufficiente richiedere la continuità in $\psi = 0$.

⁴In tal modo, la funzione δ di Dirac ha ordine zero poiché

$$|\langle \delta_y, \psi \rangle| = |\psi(y)| \leq \|\psi\|_\infty.$$

Esso possiede una topologia naturale, rispetto alla quale è anch'esso uno spazio lineare topologico, che rimane definita dalla seguente nozione di convergenza.

DEFINIZIONE 5.6 (Convergenza debole in $\mathcal{D}'(\Omega)$). *La successione di distribuzioni $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge alla distribuzione $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle J_k, \psi \rangle = \langle J, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lo spazio delle distribuzioni è completo rispetto alla convergenza debole, come stabilito dal seguente teorema che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA 5.7 (Completezza di $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Sia $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che il limite delle successioni numeriche $\{\langle J_k, \psi \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ esiste finito per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Allora l'applicazione $J: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo*

$$\langle J, \psi \rangle := \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle J_k, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

è una distribuzione. In particolare, $J_k \rightarrow J$ debolmente per $k \rightarrow +\infty$.

ESERCIZIO 5.1. Dimostrare che la serie

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_{y_j}(x),$$

con $y_j = j\ell$, $\ell > 0$, converge ad una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qualsiasi siano i coefficienti a_j .

Concludiamo la sezione con le naturali definizioni di coniugazione complessa di una distribuzione e delle sue parti reale ed immaginaria.

DEFINIZIONE 5.8 (Coniugazione complessa). *Assegnata $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiamo complessa coniugata di J la distribuzione $\bar{J} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ottenuta ponendo*

$$\langle \bar{J}, \psi \rangle = \overline{\langle J, \bar{\psi} \rangle} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definiamo allora le distribuzioni parte reale e parte immaginaria di J ,

$$\Re J = \frac{J + \bar{J}}{2}, \quad \Im J = \frac{J - \bar{J}}{2i},$$

cosicché

$$J = \Re J + i\Im J, \quad \bar{J} = \Re J - i\Im J.$$

In particolare $\Re J$ e $\Im J$ sono distribuzioni reali, nel senso che laddove $\psi = \bar{\psi}$ (ovvero se la funzione test ψ è reale) si ha $\langle \Re J, \psi \rangle, \langle \Im J, \psi \rangle \in \mathbb{R}$.

5.4. Esempi

5.4.1. Distribuzioni regolari (funzionali integrali). Ad ogni funzione localmente integrabile $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si associa la distribuzione $J_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definita dall'integrale

$$\langle J_f, \psi \rangle := \int_{\Omega} dx f(x) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La definizione è ben posta poiché

- (i) J_f è lineare per le proprietà dell'integrale di Lebesgue;
- (ii) J_f è continuo poiché se $\text{supp}(\psi) \subseteq K$ con K compatto di Ω allora

$$|\langle J_f, \psi \rangle| \leq \|\psi\|_\infty \int_K dx |f(x)| = C_K \|\psi\|_\infty,$$

con $C_K = \int_K dx |f(x)|$ (in particolare J_f è una distribuzione di ordine zero).

LEMMA 5.9. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Allora $J_f = 0$ (ovvero $J_f(\psi) = 0$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$) se e solo se $f = 0$ quasi ovunque in Ω .

DIMOSTRAZIONE. Diamo solo una traccia della prova. Per ogni compatto K di Ω si può costruire una successione $\{\psi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

- 1) $\psi_k \rightarrow \bar{f}/|f|$ quasi ovunque in $K_1 := K \setminus \{x \in K : f(x) = 0\}$;
- 2) $|\psi_k| \leq 1$.

Allora, per il teorema della convergenza dominata (applicato alla successione $g_k(x) = f(x)\psi_k(x)$ su K_1),

$$\int_K dx |f(x)| = \int_{K_1} dx |f(x)| = \int_{K_1} dx f(x) \frac{\bar{f}(x)}{|f(x)|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{K_1} dx f(x) \psi_k(x) = 0.$$

Dunque $f = 0$ quasi ovunque in K compatto arbitrario in Ω , ovvero $f = 0$ quasi ovunque in Ω . Il viceversa è ovvio. $\square$

Dal lemma precedente segue che possiamo identificare le funzioni localmente integrabili con le distribuzioni associate.⁵

ESERCIZIO 5.2. Siano $f \in L^p(\Omega)$ e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. Dimostrare che se $f_k \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$ allora $f_k \rightarrow f$ nel senso delle distribuzioni (ovvero $J_{f_k} \rightarrow J_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$).

OSSERVAZIONE 5.1. Se f è complessa allora

$$\langle J_{\bar{f}}, \psi \rangle = \int_\Omega dx \bar{f}(x) \psi(x) = \int_\Omega dx \overline{f(x) \bar{\psi}(x)} = \overline{\int_\Omega dx f(x) \bar{\psi}(x)} = \overline{\langle J_f, \bar{\psi} \rangle}$$

e quindi

$$\langle J_{\Re f}, \psi \rangle = \int_\Omega dx \Re f(x) \psi(x) = \int_\Omega dx \frac{f + \bar{f}}{2}(x) \psi(x) = \frac{\langle J_f, \psi \rangle + \overline{\langle J_f, \bar{\psi} \rangle}}{2},$$

$$\langle J_{\Im f}, \psi \rangle = \int_\Omega dx \Im f(x) \psi(x) = \int_\Omega dx \frac{f - \bar{f}}{2i}(x) \psi(x) = \frac{\langle J_f, \psi \rangle - \overline{\langle J_f, \bar{\psi} \rangle}}{2i}.$$

In particolare, ricordando la Definizione 5.8, troviamo giustamente che se $J = J_f$ allora $\Re J_f = J_{\Re f}$ e $\Im J_f = J_{\Im f}$.

⁵Infatti, date $f_1, f_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, poiché $J_{f_1} - J_{f_2} = J_{f_1 - f_2}$ si ha $f_1 = f_2$ se e solo $J_{f_1} = J_{f_2}$.

5.4.2. Misure. Il primo esempio di distribuzioni non regolari sono le misure σ -additive e σ -finite sull'algebra dei boreliani di Ω . Se μ è una misura poniamo

$$\langle J_\mu, \psi \rangle = \int_\Omega \mu(dx) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La definizione è ben posta poiché

- (i) J_μ è lineare per le proprietà dell'integrazione astratta;
- (ii) J_μ è continuo poiché se $\text{supp}(\psi) \subseteq K$ con K compatto di Ω allora

$$|\langle J_\mu, \psi \rangle| \leq \|\psi\|_\infty \int_K \mu(dx) = \mu(K) \|\psi\|_\infty.$$

(in particolare J_μ è una distribuzione di ordine zero). Alcune osservazioni:

- Se $\mu(dx) \ll dx$ allora $J_\mu = J_f$ distribuzione regolare con $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ la derivata di Radon-Nikodyn di μ rispetto alla misura di Lebesgue:

$$\langle J_\mu, \psi \rangle = \int_\Omega dx f(x) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \text{con } f = \frac{d\mu}{dx}.$$

- La definizione si estende a misure con segno, $\mu = \mu_1 - \mu_2$, o complesse, $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, ponendo

$$\langle J_\mu, \psi \rangle = \langle J_{\mu_1}, \psi \rangle - \langle J_{\mu_2}, \psi \rangle + i(\langle J_{\mu_3}, \psi \rangle - \langle J_{\mu_4}, \psi \rangle).$$

- Analogamente al caso delle distribuzioni regolari possiamo identificare le misure σ -finite con le distribuzioni associate poiché si può dimostrare che

$$\langle J_\mu, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = 0.$$

ESEMPIO 5.2 (La funzione δ di Dirac in $\mathbb{R}^n$). Consideriamo la misura unitaria concentrata in $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu_y(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in A \\ 0 & \text{se } y \notin A \end{cases}, \quad A \text{ boreliano di } \mathbb{R}^n.$$

Chiaramente $\langle J_{\mu_y}, \psi \rangle = \psi(y)$ e poniamo $J_{\mu_y} = \delta_y$, scrivendo anche

$$\langle \delta_y, \psi \rangle = \int dx \delta_y(x) \psi(x) = \int dx \delta(x - y) \psi(x),$$

con $\delta(x) = \delta_0(x)$. Questa notazione è motivata dal fatto che se $\psi_y(x) := \psi(x + y)$ allora

$$\langle \delta, \psi_y \rangle = \psi_y(0) = \psi(y) = \langle \delta_y, \psi \rangle$$

ovvero

$$\int dx \delta(x) \psi(x + y) = \int dx \delta_y(x) \psi(x).$$

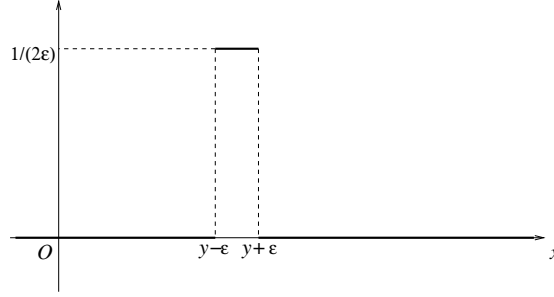


FIGURA 5.2. Una funzione approssimante la δ di Dirac centrata in $y \in \mathbb{R}$.

5.4.3. Approssimazione regolare della δ di Dirac. Abbiamo visto in Sezione 3.5 che se definiamo

$$\varphi_y^{(\varepsilon)}(x) := \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1} & \text{se } x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \\ (4\varepsilon)^{-1} & \text{se } x = y \pm \varepsilon \\ 0 & \text{se } x \notin [y - \varepsilon, y + \varepsilon] \end{cases}$$

(vedi Figura 5.2) allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \varphi_y^{(\varepsilon)}(x) \psi(x) = \psi(y) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Nel linguaggio delle distribuzioni questa proprietà si legge come una convergenza debole, ovvero

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{\varphi_y^{(\varepsilon)}} = \delta_y \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

che scriviamo anche $\varphi_y^{(\varepsilon)} \rightarrow \delta_y$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Più in generale, sussiste il seguente risultato di approssimazione.

PROPOSIZIONE 5.10. Sia $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int dx g(x) = 1$ e poniamo

$$g_y^{(\varepsilon)}(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{g_y^{(\varepsilon)}} = \delta_y \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx g_y^{(\varepsilon)}(x) \psi(x) = \psi(y) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Si ha (con la sostituzione $z = \frac{x-y}{\varepsilon}$)

$$\begin{aligned} \int dx g_y^{(\varepsilon)}(x) \psi(x) - \psi(y) &= \int dx \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \psi(x) - \psi(y) \\ \int dz g(z) \psi(y + \varepsilon z) - \psi(y) &= \int dz g(z) [\psi(y + \varepsilon z) - \psi(y)]. \end{aligned}$$

La successione di funzioni $f_\varepsilon(z) := g(z) [\psi(y + \varepsilon z) - \psi(y)]$ è tale che

- (i) $f_\varepsilon(z) \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ per quasi tutti gli $z \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $|f_\varepsilon(z)| \leq 2\|\psi\|_\infty |g(z)|$.

Allora, per il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dz f_\varepsilon(z) = 0,$$

da cui la tesi. $\square$

In particolare, se $\chi_A(\cdot)$ indica la funzione caratteristica dell'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, allora

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(y)|} \chi_{B_\varepsilon(y)} \rightarrow \delta_y \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

dove $B_\varepsilon(y)$ è la bolla di centro y e raggio ε .

5.4.4. Distribuzioni di ordine superiore. Si può dimostrare che le misure esauriscono l'insieme delle distribuzioni di ordine zero. Ovvero condizione necessaria e sufficiente affinché una distribuzione $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sia di ordine zero è che $J = J_\mu$ per qualche misura complessa μ . Vediamo ora alcuni esempi di distribuzioni non misure.

ESEMPIO 5.3 (Valor principale di $1/x$ in $\mathbb{R}$). Il funzionale integrale $\langle J_{1/x}, \psi \rangle = \int dx \psi(x)/x$ non è ben definito poiché $1/x \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Definiamo invece *valor principale di $1/x$* la distribuzione

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \psi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} dx \frac{\psi(x)}{x}.$$

Verifichiamo che è ben definita: fissata $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, sia $R > 0$ tale che $\text{supp}(\psi) \subseteq [-R, R]$, cosicché (per $\varepsilon < R$)

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} dx \frac{\psi(x)}{x} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} dx \frac{\psi(x)}{x} = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} dx \frac{\psi(x)}{x} - \underbrace{\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} dx \frac{\psi(0)}{x}}_{= 0 \text{ per disparità}}.$$

Quindi

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \int_{-R}^R dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x},$$

dove l'ultimo integrale è assolutamente convergente. Più specificatamente:

$$\max_{|x| \leq R} \left| \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} \right| \leq \|\psi'\|_\infty,$$

cosicché

$$\left| \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \psi \right\rangle \right| \leq 2R \|\psi'\|_\infty \implies \mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(in particolare $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ è una distribuzione di ordine uno).

ESERCIZIO 5.3. Dimostrare che

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \psi \right\rangle = \int_{|x| \leq 1} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} + \int_{|x| > 1} dx \frac{\psi(x)}{x}.$$

ESERCIZIO 5.4. Dimostrare le *formule di Sokhotski*:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

dove le distribuzioni nel membro di sinistra sono definite ponendo

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0}, \psi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} \int dx \frac{\psi(x)}{x \pm i\varepsilon}.$$

5.5. Operazioni sulle distribuzioni

5.5.1. Sostituzione lineare delle variabili nelle distribuzioni. Iniziamo da quelle regolari. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\ell(x) = \ell_{A,b}(x) = Ax + b$$

una trasformazione affine invertibile di $\mathbb{R}^n$ in sé (quindi $\det A \neq 0$). Per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle J_{f \circ \ell}, \psi \rangle = \int dx f(Ax + b) \psi(x) = \frac{1}{|\det A|} \int dx' f(x') \psi(A^{-1}(x' - b))$$

(con la sostituzione $x' = \ell(x)$ per cui $dx' = |\det A|dx$). Pertanto

$$\langle J_{f \circ \ell}, \psi \rangle = \frac{\langle J_f, \psi \circ \ell^{-1} \rangle}{|\det A|}.$$

La formula precedente si estende in maniera naturale al caso di distribuzioni qualsiasi. Precisamente, per ogni $J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiamo la distribuzione $J \circ \ell$ ponendo

$$\langle J \circ \ell, \psi \rangle = \frac{\langle J, \psi \circ \ell^{-1} \rangle}{|\det A|}.$$

In particolare:

(i) Se $\ell = \ell_{R,0}$ è una rotazione di $R \in SO(n)$ allora

$$\langle J \circ \ell_{R,0}, \psi \rangle = \langle J, \psi \circ \ell_{R^T,0} \rangle.$$

(ii) Se $\ell = \ell_{\mathbb{I},b}$ è una traslazione di $b \in \mathbb{R}^n$ allora

$$\langle J \circ \ell_{\mathbb{I},b}, \psi \rangle = \langle J, \psi \circ \ell_{\mathbb{I},-b} \rangle.$$

(iii) Se $\ell = \ell_{\lambda\mathbb{I},0}$ è una similitudine per uno scalare $\lambda \neq 0$ allora

$$\langle J \circ \ell_{\lambda\mathbb{I},0}, \psi \rangle = \frac{\langle J, \psi \circ \ell_{\lambda^{-1}\mathbb{I},0} \rangle}{|\lambda|^n}.$$

Ad esempio, nel caso della funzione δ di Dirac,

$$\int dx \delta_y(Ax + b) \psi(x) = \frac{1}{|\det A|} \psi(A^{-1}(y - b))$$

ed in particolare, per $R \in SO(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$,

$$\delta(Rx) = \delta(x), \quad \delta(x - b) = \delta_b(x), \quad \delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|^n} \delta(x).$$

5.5.2. Derivata delle distribuzioni. Nel caso di una distribuzione regolare J_f con $f \in C^k(\Omega)$, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\langle J_{D_i f}, \psi \rangle &= \int_{\Omega} dx D_i f(x) \psi(x) = - \int_{\Omega} dx f(x) D_i \psi(x) \\ &= - \langle J_f, D_i \psi \rangle,\end{aligned}$$

dove $D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Più in generale, se $|\alpha| \leq k$,

$$\begin{aligned}\langle J_{D^\alpha f}, \psi \rangle &= \int_{\Omega} dx D^\alpha f(x) \psi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} dx f(x) D^\alpha \psi(x) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle J_f, D^\alpha \psi \rangle.\end{aligned}$$

Questo conto suggerisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE 5.11. Per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la derivata generalizzata $D^\alpha J$ di $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è la distribuzione $D^\alpha J$ ottenuta ponendo

$$\langle D^\alpha J, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle J, D^\alpha \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

La definizione è ben posta poiché $D^\alpha J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ in quanto l'applicazione $D^\alpha: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ è lineare e continua. Inoltre, dalla definizione segue immediatamente che

- $D^\alpha: \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ è lineare e continua.
- Il risultato della derivazione non dipende dall'ordine di derivazione.
- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.

ESEMPIO 5.4 (La derivata della funzione di Heaviside in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). La funzione di Heaviside è

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Con un abuso di notazione scriviamo $J_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ (identificano cioè la funzione con la distribuzione associata) e calcoliamo, per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathcal{H}', \psi \rangle = - \langle \mathcal{H}, \psi' \rangle = - \int_0^\infty dx \psi'(x) = \psi(0) = \langle \delta_0, \psi \rangle.$$

Quindi $\mathcal{H}' = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Si osservi che la derivata usuale (non generalizzata) di $\mathcal{H}$ è invece $\mathcal{H}' = 0$ quasi ovunque. D'altra parte, in questo caso non si applica il teorema fondamentale del calcolo, in particolare $\int_{-\infty}^x dy \mathcal{H}'(y) = 0 \neq \mathcal{H}(x)$ per $x \geq 0$, poiché $\mathcal{H}$ non è assolutamente continua.

Osserviamo inoltre che, effettuando una traslazione di $-y \in \mathbb{R}$, quindi introducendo $\mathcal{H}_y(x) = \mathcal{H}(x - y)$, si trova in modo analogo $\mathcal{H}'_y = \delta_y$.

In effetti, più in generale, per ogni distribuzione J e ogni trasformazione affine ℓ , la derivazione commuta con il relativo cambiamento di variabili, ovvero

$$D^\alpha (J \circ \ell) = (D^\alpha J) \circ \ell.$$

ESEMPIO 5.5 (La derivata della δ di Dirac). Calcoliamo, per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \delta'_y, \psi \rangle = -\langle \delta_y, \psi' \rangle = -\psi'(y).$$

Iterando:

$$\langle \delta''_y, \psi \rangle = \psi''(y), \quad \langle \delta'''_y, \psi \rangle = -\psi'''(y), \quad \text{etc.}$$

ESERCIZIO 5.5. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 a tratti avente punti di discontinuità di prima specie e isolati. Siano $\{x_k\}$ tali punti. Dimostrare che

$$f'(x) = f'_{\text{cl}}(x) + \sum_k [f]_{x_k} \delta_{x_k}(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

dove $f'_{\text{cl}}(x)$ è la derivata classica (definita per $x \neq x_k$) mentre $[f]_{x_k} = f(x_k^+) - f(x_k^-)$ è il salto della funzione nei punti di discontinuità.

ESERCIZIO 5.6. Dimostrare che

$$\frac{d}{dx} \log|x| = \mathcal{D}' \frac{1}{x} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

ESERCIZIO 5.7. Posto $G_y(x) = -\frac{1}{2}|x-y|$, dimostrare che

$$\frac{d^2}{dx^2} G_y(x) + \delta_y(x) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

5.5.3. Moltiplicazione per una funzione regolare. In generale, il prodotto di due distribuzioni non è definito. Un semplice controesempio: se esistesse un prodotto (associativo) allora

$$0 = 0 \mathcal{D}' \frac{1}{x} = (x\delta(x)) \mathcal{D}' \frac{1}{x} = \delta(x) \left(x \mathcal{D}' \frac{1}{x} \right) = \delta(x).$$

È invece ben definito il prodotto di una distribuzione per una funzione regolare.

DEFINIZIONE 5.12. Sia $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $u \in C^\infty(\Omega)$. Si definisce $uJ \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ponendo

$$\langle uJ, \psi \rangle := \langle J, u\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

In effetti la definizione è ben posta poiché la mappa $\psi \rightarrow u\psi$ è lineare e continua di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Vale inoltre la usuale regola di Leibniz rispetto alla derivazione, ovvero

$$D_i(uJ) = u(D_i J) + (D_i u)J.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle D_i(uJ), \psi \rangle &= -\langle uJ, D_i \psi \rangle = -\langle J, u D_i \psi \rangle = -\langle J, D_i(u\psi) \rangle + \langle J, (D_i u)\psi \rangle \\ &= \langle D_i J, u\psi \rangle + \langle (D_i u)J, \psi \rangle = \langle u(D_i J) + (D_i u)J, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Due esempi elementari di prodotto tra distribuzione e funzione regolare:

(1) $u\delta_0 = u(0)\delta_0$ poiché

$$\langle u\delta_0, \psi \rangle = \langle \delta_0, u\psi \rangle = u(0)\psi(0) = \langle u(0)\delta_0, \psi \rangle.$$

(2) $x\mathcal{D}\frac{1}{x} = 1$ poiché

$$\left\langle x\mathcal{D}\frac{1}{x}, \psi \right\rangle = \left\langle \mathcal{D}\frac{1}{x}, x\psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} dx \psi(x) = \int dx \psi(x) = \langle 1, \psi \rangle.$$

5.5.4. Operatori differenziali. Consideriamo funzioni fondamentali e distribuzioni vettoriali, cioè a valori in $\mathbb{C}^n$:

$$\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{C}^n) \iff \boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n), \psi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, \dots, n.$$

$$\mathbf{J} \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}^n) \iff \mathbf{J} = (J_1, \dots, J_n), J_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = 1, \dots, n.$$

La dualità naturale tra gli spazi $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{C}^n)$ e $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}^n)$ si ottiene ponendo

$$\langle \mathbf{J}, \boldsymbol{\psi} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle J_i, \psi_i \rangle.$$

Possiamo ora estendere le definizioni dei principali operatori differenziali ad operatori differenziali che agiscono sulle distribuzioni usando il concetto di derivata generalizzata. Definiamo in tal modo:

- *Gradiente* di $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$: $\nabla J = (D_1 J, \dots, D_n J) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}^n)$ tale che

$$\langle \nabla J, \boldsymbol{\psi} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i J, \psi_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle J, D_i \psi_i \rangle = - \langle J, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \rangle.$$

- *Divergenza* di $\mathbf{J} \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C}^n)$: $\operatorname{div} \mathbf{J} = \sum_{i=1}^n D_i J_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{J}, \psi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i J_i, \psi \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle J_i, D_i \psi \rangle = - \langle \mathbf{J}, \nabla \psi \rangle.$$

- *Laplaciano* di $J \in \mathcal{D}'(\Omega)$: $\Delta J = \operatorname{div} \nabla J = \sum_{i=1}^n D_i^2 J$ tale che

$$\langle \Delta J, \psi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i^2 J, \psi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle J, D_i^2 \psi \rangle = \langle J, \Delta \psi \rangle.$$

5.6. Funzione di Green come soluzione in senso generalizzato

Nella Sezione 3.5 abbiamo introdotto la funzione di Green (3.18) per l'equazione delle onde in $d = 1$ mostrando, almeno formalmente, che essa risolve l'equazione nel limite in cui l'impulso iniziale è concentrato in un punto. Possiamo ora fornire una caratterizzazione rigorosa della precedente interpretazione.

PROPOSIZIONE 5.13. *La funzione di Green*

$$K(x, y, t) := \frac{1}{2c} [\mathcal{H}(x - y + ct) - \mathcal{H}(x - y - ct)]$$

risolve in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ il seguente problema di Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ K(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial t}(x, y, 0) = \delta_y(x) & \text{per } t = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che

- (i) $\left\langle \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \psi \right\rangle = 0$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$;
(ii) $\frac{\partial K}{\partial t}(x, y, t) \rightarrow \delta_y(x)$ per $t \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Verifichiamo (i). Poiché $K(x, y, t) = K(x - y, 0, t)$ è sufficiente dimostrarlo per $y = 0$. Detto

$$C_0 := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : |x| \leq ct\}$$

il cono di influenza di $y = 0$, si ha

$$K(x, 0, t) = \begin{cases} 1/(2c) & \text{se } (x, t) \in C_0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \psi \right\rangle &= \int_0^\infty dt \int dx K(x, 0, t) \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) \right] \\ &= \frac{1}{2c} \int dx \int_{\frac{|x|}{c}}^\infty dt \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) - \frac{c}{2} \int_0^\infty dt \int_{-ct}^{ct} dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) \\ &= -\frac{1}{2c} \int dx \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(x, \frac{|x|}{c} \right) - \frac{c}{2} \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(ct, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(-ct, t) \right]. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \int dx \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(x, \frac{|x|}{c} \right) &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty dx \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(x, \frac{x}{c} \right) + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^0 dx \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(x, -\frac{x}{c} \right) \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\infty dx \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \left(x, \frac{x}{c} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(-x, \frac{x}{c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}(ct, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(-ct, t) \right] \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si è posto $x = ct$, cosicché $dx = cdt$). Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \psi \right\rangle &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}(ct, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(-ct, t) \right] \\ &\quad - \frac{c}{2} \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(ct, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(-ct, t) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}(ct, t) + c \frac{\partial \psi}{\partial x}(ct, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(-ct, t) - c \frac{\partial \psi}{\partial x}(-ct, t) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dt \left[\frac{d}{dt} \psi(ct, t) + \frac{d}{dt} \psi(-ct, t) \right] = \psi(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Questo dimostra (i).

Verifichiamo (ii). Poiché $K(x, 0, t) = \frac{1}{2c} [\mathcal{H}(x + ct) - \mathcal{H}(x - ct)]$, già sappiamo che

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, 0, t) = \frac{1}{2} [\delta_{ct}(x) + \delta_{-ct}(x)] \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Quindi, per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle \frac{\partial K}{\partial t}(\cdot, 0, t), \psi \right\rangle = \frac{\psi(ct) + \psi(-ct)}{2} \longrightarrow \psi(0) = \langle \delta_0, \psi \rangle \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

□

5.7. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 5.1. Per il teorema di completezza è sufficiente verificare che per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è convergente la serie numerica

$$\left\langle \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_{y_j}, \psi \right\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \psi(j\ell).$$

Ma questo è ovvio poiché tale serie è composta da un numero finito di termini, essendo $\psi(j\ell) = 0$ se $j\ell \notin \text{supp}(\psi)$.

SOLUZIONE ES. 5.2. Siano $f \in L^p(\Omega)$ e $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. Dobbiamo dimostrare che se $f_k \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$ allora $J_{f_k} \rightarrow J_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Distinguiamo due casi:

(i) $p = 1$. Si ha

$$|\langle J_{f_k}, \psi \rangle - \langle J_f, \psi \rangle| \leq \int dx |f_k(x) - f(x)| |\psi(x)| \leq \|f_k - f\|_{L^1(\Omega)} \|\psi\|_{\infty},$$

(ii) $p > 1$. Per la disuguaglianza di Hölder,

$$|\langle J_{f_k}, \psi \rangle - \langle J_f, \psi \rangle| \leq \int dx |f_k(x) - f(x)| |\psi(x)| \leq \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \|\psi\|_{L^q(\Omega)},$$

dove $q = p/(p-1)$.

SOLUZIONE ES. 5.3. Sappiamo che se $\text{supp}(\psi) \subset [-R, R]$ allora

$$\left\langle \mathcal{D} \frac{1}{x}, \psi \right\rangle = \int_{|x| \leq R} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}.$$

Senza perdere di generalità possiamo assumere $R > 1$ e scrivere

$$\int_{|x| \leq R} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \int_{|x| \leq 1} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} + \int_{1 < |x| \leq R} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}.$$

Ma

$$\begin{aligned} \int_{1 < |x| \leq R} dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} &= \int_{1 < |x| \leq R} dx \frac{\psi(x)}{x} - \underbrace{\int_{1 < |x| \leq R} dx \frac{\psi(0)}{x}}_{= 0 \text{ per disparità}} \\ &= \underbrace{\int_{|x| > 1} dx \frac{\psi(x)}{x}}_{\text{poiché } \psi = 0 \text{ per } |x| > R}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE ES. 5.4. Consideriamo il caso con il segno +, l'altro è analogo. Fissata $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sia R tale che $\text{supp}(\psi) \subset [-R, R]$. Allora

$$\begin{aligned} \int dx \frac{\psi(x)}{x + i\varepsilon} &= \int_{-R}^R dx \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \psi(x) \\ &= \psi(0) \int_{-R}^R dx \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_{-R}^R dx \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\psi(x) - \psi(0)] \\ &=: A_\varepsilon(\psi) + B_\varepsilon(\psi). \end{aligned}$$

Ora, poiché l'integrazione di $x/(x^2 + \varepsilon^2)$ è zero per disparità,

$$A_\varepsilon(\psi) = \psi(0) \int_{-R}^R dx \frac{-i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = -i\psi(0) \int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} dy \frac{1}{y^2 + 1} = -2i\psi(0) \arctan \frac{R}{\varepsilon}.$$

Quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A_\varepsilon(\psi) = -i\pi\psi(0) = -i\pi \langle \delta, \psi \rangle.$$

D'altra parte, per convergenza dominata,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} B_\varepsilon(\psi) = \int_{-R}^R dx \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \left\langle \mathcal{D} \frac{1}{x}, \psi \right\rangle.$$

SOLUZIONE ES. 5.6. Osserviamo innanzitutto che $\log|x|$ è una distribuzione regolare poiché è una funzione localmente integrabile. Ora, per $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\left\langle \frac{d}{dx} \log|x|, \psi \right\rangle = - \int dx \log|x| \psi'(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} dx \log|x| \psi'(x).$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} dx \log|x| \psi'(x) &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \log(-x) \psi'(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \log(x) \psi'(x) \\ &= \psi(-\varepsilon) \log \varepsilon - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{\psi(x)}{x} - \psi(\varepsilon) \log \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{\psi(x)}{x} \\ &= [\psi(-\varepsilon) - \psi(\varepsilon)] \log \varepsilon - \int_{|x| \geq \varepsilon} dx \frac{\psi(x)}{x}. \end{aligned}$$

Ma

$$[\psi(-\varepsilon) - \psi(\varepsilon)] \log \varepsilon = [-2\psi'(0)\varepsilon + o(\varepsilon)] \log \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

per cui

$$\left\langle \frac{d}{dx} \log|x|, \psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} dx \frac{\psi(x)}{x} = \left\langle \mathcal{D} \frac{1}{x}, \psi \right\rangle.$$

Trasformata di Fourier

6.1. Derivazione euristica

La serie di Fourier permette di rappresentare una funzione periodica come sovrapposizione di oscillazioni armoniche. L'integrale di Fourier estende tale rappresentazione al caso di funzioni non periodiche.

Per semplicità, consideriamo dapprima una funzione $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e sia $L > 0$ tale che $\text{supp}(\psi) \subset [-L, L]$, cosicché si ha

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \frac{\pi}{L} x} \quad \forall x \in [-L, L],$$

con

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dy \psi(y) e^{-in \frac{\pi}{L} y} = \frac{1}{2L} \int dy \psi(y) e^{-in \frac{\pi}{L} y}.$$

Definiamo *trasformata di Fourier* di ψ la funzione

$$\hat{\psi}(\xi) := \int dy \psi(y) e^{-i\xi y},$$

e poniamo $\varepsilon = \frac{\pi}{L}$. Lo sviluppo di Fourier prende allora la forma

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2L} \hat{\psi}\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{in \frac{\pi}{L} x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon \hat{\psi}(n\varepsilon) e^{in\varepsilon x},$$

in cui riconosciamo una somma di Riemann estesa a tutta la retta. Formalmente, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ (ovvero $L \rightarrow \infty$) troviamo

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \hat{\psi}(\xi) e^{i\xi x},$$

ovvero

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \int dy \psi(y) e^{i\xi(x-y)} \quad (\text{Formula di Fourier}).$$

Osserviamo inoltre che l'identità formale

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \int dy \psi(y) e^{i\xi(x-y)} = \int dy \psi(y) \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{i\xi(x-y)}$$

si può interpretare affermando che

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{i\xi(x-y)},$$

ovvero che la “trasformata di Fourier” della funzione generalizzata $\delta(x)$ è

$$\hat{\delta}(\xi) = 1.$$

Questa interpretazione verrà resa rigorosa.

6.2. Proprietà elementari

Come mostrato nella seguente proposizione, la trasformata di Fourier di una funzione sommabile è ben definita e possiede importanti proprietà.

PROPOSIZIONE 6.1. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora la trasformata di Fourier*

$$\hat{f}(\xi) = \int dy f(y) e^{-i\xi y}$$

è ben definita e gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\hat{f}$ è limitata e continua;
- (ii) se $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ uniformemente su $\mathbb{R}$;
- (iii) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.¹

DIMOSTRAZIONE. $\hat{f}$ è ben definita poiché $|f(y)e^{-i\xi y}| \leq |f(y)|$ ed f è sommabile su $\mathbb{R}$. Dimostriamo i punti (i), (ii), (iii):

(i) Per la stima precedente $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, dunque $\hat{f}$ è limitata. Inoltre, per ogni $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| \leq \int dy |f(y)| |e^{-i\xi y} - e^{-i\xi_0 y}|,$$

con $|f(y)| |e^{-i\xi y} - e^{-i\xi_0 y}| \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow \xi_0$ per quasi tutti gli $y \in \mathbb{R}$ e $|f(y)| |e^{-i\xi y} - e^{-i\xi_0 y}| \leq 2|f(y)|$. Allora, per il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi_0) \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Chiaramente $\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi) = \widehat{(f_n - f)}(\xi)$ e quindi

$$|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \|f_n - f\|_{L^1}.$$

(iii) Calcoliamo dapprima la trasformata di Fourier della funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ di un intervallo $[a, b]$:

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \int_a^b dy e^{-i\xi y} = \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi}.$$

Quindi $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = 0$ e, per linearità, il risultato si estende alla trasformata di

Fourier di una qualsiasi funzione semplice $\sum_{i=1}^M c_i \chi_{[a_i, b_i]}$. Ma le funzioni semplici sono dense in $L^1(\mathbb{R})$. Quindi ne esiste una successione f_n convergente a f in $L^1(\mathbb{R})$. Stimiamo allora

$$|\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi) + \hat{f}_n(\xi)| \leq \|f - f_n\|_{L^1} + |\hat{f}_n(\xi)|.$$

¹Quest'ultimo risultato, ovvero l'annullarsi all'infinito della trasformata di Fourier di una funzione sommabile, è noto in letteratura come *Lemma di Riemann-Lebesgue*.

Fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ siano allora n_ε tale che $\|f - f_{n_\varepsilon}\|_{L^1} < \varepsilon/2$ ed $R > 0$ tale che $|\hat{f}_{n_\varepsilon}(\xi)| < \varepsilon/2$ per $|\xi| > R$. Ne segue che $|\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$ per $|\xi| > R$, da cui la tesi per l'arbitrarietà nella scelta di ε . $\square$

Osserviamo che la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ non è in generale sommabile (cioè $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$). Ad esempio, la trasformata della funzione caratteristica $\chi_{[-A, A]}(x)$ dell'intervallo $[-A, A]$ è

$$\hat{\chi}_{[-A, A]}(\xi) = \frac{e^{i\xi A} - e^{-i\xi A}}{i\xi} = 2 \frac{\sin A\xi}{\xi},$$

che non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ in quanto

$$\int d\xi \frac{|\sin A\xi|}{|\xi|} = \int d\xi' \frac{|\sin \xi'|}{|\xi'|} = 2 \int_0^\infty d\xi' \frac{|\sin \xi'|}{\xi'} = +\infty.$$

Infatti, poiché

$$\xi' \in I_n := \left[(n-1)\pi + \frac{\pi}{6}, n\pi - \frac{\pi}{6} \right] \implies |\sin \xi'| \geq \frac{1}{2},$$

si ha (essendo $|I_n| = 2\pi/3$)

$$\int_0^\infty d\xi' \frac{|\sin \xi'|}{\xi'} \geq \sum_{n \geq 1} \frac{|I_n|}{2} \frac{1}{n\pi - (\pi/6)} = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{6n-1} = +\infty.$$

OSSERVAZIONE 6.1. D'altra parte, l'integrale improprio $\int d\xi \frac{\sin A\xi}{\xi}$ esiste nel senso di Riemann, precisamente vale il seguente limite notevole:

$$\int d\xi \frac{\sin A\xi}{\xi} = 2 \int_0^\infty d\xi \frac{\sin A\xi}{\xi} = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R d\xi \frac{\sin A\xi}{\xi} = \pi. \quad (6.1)$$

Lo dimostriamo poiché è un limite importante che utilizzeremo in seguito. Osserviamo innanzitutto che il limite non dipende dal valore di A poiché

$$\int_0^R d\xi \frac{\sin A\xi}{\xi} = \int_0^{AR} d\xi' \frac{\sin \xi'}{\xi'}.$$

Quindi è sufficiente calcolarlo nel caso $A = 1$. A tal scopo utilizziamo il metodo dei residui.

Fissati $0 < \varepsilon < R$, consideriamo il contorno $\Gamma \subset \mathbb{C}$ così definito,

$$\Gamma = I_- \cup \gamma_\varepsilon \cup I_+ \cup \gamma_R,$$

dove

$$I_- = \{z = x: x \in [-\varepsilon, -R]\}, \quad \gamma_\varepsilon = \{z = \varepsilon e^{i\theta}: \theta \in [0, \pi]\},$$

$$I_+ = \{z = x: x \in [\varepsilon, R]\}, \quad \gamma_R = \{z = R e^{i\theta}: \theta \in [0, \pi]\}.$$

Poiché la funzione e^{iz}/z non ha poli nella regione chiusa e limitata racchiusa da Γ , per il teorema sui residui possiamo affermare che

$$\oint dz \frac{e^{iz}}{z} = 0,$$

ovvero

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{\gamma_\varepsilon} dz \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\varepsilon}^R dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{\gamma_R} dz \frac{e^{iz}}{z} = 0,$$

dove l'integrazione sull'arco γ_ε è in senso orario e quella sull'arco γ_R in senso antiorario. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{\varepsilon}^R dx \frac{e^{ix}}{x} &= \underbrace{\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{\cos x}{x} + \int_{\varepsilon}^R dx \frac{\cos x}{x} \right]}_{= 0 \text{ per disparità}} \\ &+ i \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{\sin x}{x} + \int_{\varepsilon}^R dx \frac{\sin x}{x} \right] = 2i \int_{\varepsilon}^R dx \frac{\sin x}{x}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} dz \frac{e^{iz}}{z} \right| &= \left| \int_0^\pi d(\operatorname{Re} i\theta) \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R e^{i\theta}} \right| = \left| i \int_0^\pi d\theta e^{iR\cos\theta - R\sin\theta} \right| \\ &\leq \int_0^\pi d\theta e^{-R\sin\theta} \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty \quad (\text{convergenza dominata}). \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} dz \frac{e^{iz}}{z} &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\varepsilon} dz \frac{e^{iz} - 1}{z} = \int_\pi^0 \frac{d(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} + \mathcal{R}_\varepsilon \\ &= \int_\pi^0 \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} + \mathcal{R}_\varepsilon = -i\pi + \mathcal{R}_\varepsilon, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_\varepsilon| &= \left| \int_{\gamma_\varepsilon} dz \frac{e^{iz} - 1}{z} \right| = \left| \int_\pi^0 d\theta i(e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1) \right| \\ &\leq \int_0^\pi d\theta |e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1| \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow \infty \quad (\text{convergenza dominata}) \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'identità $\oint dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$, abbiamo

$$2i \int_{\varepsilon}^R dx \frac{\sin x}{x} + \int_{\gamma_R} dz \frac{e^{iz}}{z} - i\pi + \mathcal{R}_\varepsilon = 0$$

Facendo tendere prima ε a zero e quindi R all'infinito otteniamo il limite cercato:

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

6.3. Formula di inversione

Abbiamo visto come, sotto ipotesi opportune, la conoscenza dei coefficienti di Fourier di una funzione periodica permette di ricostruire la medesima mediante la serie di Fourier. Analogamente, con ipotesi sufficienti di regolarità, è possibile ricostruire una funzione sommabile a partire dalla sua trasformata di Fourier mediante un'integrazione (integrale di Fourier).

TEOREMA 6.2 (Formula di Fourier). Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Allora vale la formula di inversione (o di Fourier):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \int dy f(y) e^{i\xi(x-y)},$$

dove l'integrazione nella variabile ξ va intesa, in generale, come valore principale:

$$\int d\xi = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A d\xi.$$

DIMOSTRAZIONE. Omettendo la dipendenza da x (che in quanto segue è fissato) poniamo

$$J(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A d\xi \int dy f(y) e^{i\xi(x-y)},$$

cosicché dobbiamo dimostrare che $\lim_{A \rightarrow \infty} J(A) = f(x)$.

Usando il teorema di Fubini e quindi integrando l'esponenziale si ha

$$J(A) = \frac{1}{2\pi} \int dy f(y) \int_{-A}^A d\xi e^{i\xi(x-y)} = \frac{1}{\pi} \int dy f(y) \frac{\sin A(x-y)}{x-y},$$

da cui, con la sostituzione $z = y - x$,

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int dz f(x+z) \frac{\sin Az}{z}$$

(integrale assolutamente convergente). Sfruttando ora l'identità (6.1), ovvero

$$\int dz \frac{\sin Az}{z} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N dz \frac{\sin Az}{z} = \pi,$$

scriviamo, con $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} J(A) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N dz f(x+z) \frac{\sin Az}{z} - \frac{f(x)}{\pi} \int_{-N}^N dz \frac{\sin Az}{z} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{|z|>N} dz f(x+z) \frac{\sin Az}{z} - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z|>N} dz \frac{\sin Az}{z} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N dz \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az + R_N^{(1)} - R_N^{(2)} \end{aligned}$$

dove

$$R_N^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{|z|>N} dz f(x+z) \frac{\sin Az}{z}, \quad R_N^{(2)} = \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z|>N} dz \frac{\sin Az}{z}.$$

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. Poiché

$$|R_N^{(1)}| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|z|>N} dz |f(x+z)|,$$

per l'assoluta integrabilità di f esiste $N_\varepsilon = N_\varepsilon^{(1)}(x)$ tale che, $|R_N^{(1)}| < \varepsilon/2$ per ogni $N > N_\varepsilon^{(1)}$ e $A > 0$. D'altra parte,

$$|R_N^{(2)}| = \frac{|f(x)|}{\pi} \left| \pi - \int_{-N}^N dz \frac{\sin Az}{z} \right| = \frac{|f(x)|}{\pi} \left| \pi - \int_{-AN}^{AN} dz' \frac{\sin z'}{z'} \right|,$$

cosicché esiste $N_\varepsilon^{(2)} = N_\varepsilon^{(2)}(x)$ tale che $|R_N^{(2)}| < \varepsilon/2$ per ogni $N > N_\varepsilon^{(2)}$ e $A \geq 1$. Quindi, fissato $N > \max\{N_\varepsilon^{(1)}; N_\varepsilon^{(2)}\}$ si ha

$$|J(A) - f(x)| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N dz \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az \right| + \varepsilon \quad \forall A \geq 1.$$

Per l'arbitrarietà nella scelta di $\varepsilon > 0$ rimane da dimostrare che

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N dz \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az = 0.$$

A tal scopo introduciamo la funzione

$$g_N(z) := \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \chi_{-[N,N]}(z),$$

cosicché

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N dz \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az &= \frac{1}{\pi} \int dz g_N(z) \frac{e^{iAz} - e^{-iAz}}{2i} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int dz g_N(z) e^{iAz} - \frac{1}{2\pi i} \int dz g_N(z) e^{-iAz} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \widehat{g}_N(-A) - \frac{1}{2\pi i} \widehat{g}_N(A). \end{aligned}$$

con $\widehat{g}_N$ la trasformata di Fourier di g_N . Ma $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ implica che $g_N \in L^1(\mathbb{R})$ e dunque, per il punto (iii) della Proposizione 6.1,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \widehat{g}_N(\pm A) = 0,$$

da cui la tesi. □

OSSERVAZIONE 6.2. In realtà abbiamo dimostrato un risultato più forte: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed in un punto $x \in \mathbb{R}$ soddisfa la condizione di Dini (già introdotta nell'Osservazione 4.1)

$$\exists \delta > 0: \int_{-\delta}^{\delta} dz \left| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \right| < +\infty$$

allora la formula di inversione vale in quel punto:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \int dy f(y) e^{i\xi(x-y)}.$$

Infatti sotto tale ipotesi si ha ancora $g_N \in L^1(\mathbb{R})$ (vedi la conclusione della dimostrazione).

COROLLARIO 6.3. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che $\widehat{f} = 0$ quasi ovunque allora $f = 0$ quasi ovunque.

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità lo dimostriamo quando $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Osserviamo che, per ogni $z \in \mathbb{R}$,

$$\int dy f(y+z) e^{-i\xi y} = e^{i\xi z} \int dy f(y+z) e^{-i\xi(y+z)} = e^{i\xi z} \int dy f(y') e^{-i\xi y'} = e^{i\xi z} \widehat{f}(\xi).$$

Pertanto (essendo $e^{i\xi z} \neq 0$)

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \implies \int dy f(y+z) e^{-i\xi y} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Fissato $h \in \mathbb{R}$ sia

$$g(y) = \int_y^{y+h} dz' f(z') = \int_0^h dz f(y+z).$$

Per il teorema di Fubini, $g \in L^1(\mathbb{R})$ con trasformata di Fourier

$$\widehat{g}(\xi) = \int dy g(y) e^{-i\xi y} = \int dy \int_0^h dz f(y+z) e^{-i\xi y} = \int_0^h dz \int dy f(y+z) e^{-i\xi y} = 0.$$

Ma $g \in C^1(\mathbb{R})$ (precisamente $g'(y) = f(y+h) - f(y)$) e pertanto $g = 0$ in virtù della formula di inversione. In particolare $g(0) = 0$ e quindi

$$\int_0^h dz f(z) = 0,$$

da cui $f = 0$ per l'arbitrarietà nella scelta di h . $\square$

OSSERVAZIONE 6.3. Nella sola ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ la funzione g risulta assolutamente continua, nel qual caso si può dimostrare che soddisfa la condizione di Dini, che è sufficiente per concludere.

COROLLARIO 6.4. *Una funzione sommabile è determinata in modo univoco dalla sua trasformata di Fourier.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $\widehat{f} = \widehat{g}$ quasi ovunque. Posto $h = f - g$, per la linearità della trasformazione di Fourier si ha $\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g}$. Dunque $\widehat{h} = 0$ quasi ovunque da cui $h = 0$ quasi ovunque per il Corollario 6.3. $\square$

ESEMPIO 6.1. (1) Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int dy e^{-a|y|} e^{-i\xi y} = \int_0^\infty dy e^{-(a+i\xi)y} + \int_{-\infty}^0 dy e^{(a-i\xi)y} \\ &= \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{\xi^2 + a^2}. \end{aligned}$$

(2) Calcoliamo la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $a > 0$. Possiamo sfruttare l'esempio precedente e la formula di inversione. Precisamente si ha

$$g(x) = \frac{1}{2a} e^{-a|x|} \implies \widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + a^2},$$

da cui, per la formula di inversione,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \frac{1}{\xi^2 + a^2} e^{i\xi x} = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \frac{1}{\xi^2 + a^2} e^{-i\xi x}.$$

Pertanto

$$\widehat{f}(\xi) = \int dy \frac{1}{y^2 + a^2} e^{-i\xi y} = 2\pi g(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}.$$

ESERCIZIO 6.1. Calcolare, con il metodo dei residui la trasformata di Fourier delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad f_2(x) = e^{-ax^2}, \quad (a > 0 \text{ parametro fissato}).$$

OSSERVAZIONE 6.4. Alternativamente all'Esercizio 6.1, mostriamo un metodo per calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\xi) = \int dx e^{-ax^2} e^{-i\xi x}$ della funzione gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, senza utilizzare il metodo dei residui. Si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \int dx (-ix) e^{-ax^2} e^{-i\xi x} = \frac{i}{2a} \int dx \left(\frac{d}{dx} e^{-ax^2} \right) e^{-i\xi x} \\ &= \frac{i}{2a} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i}{2a} \int dx e^{-ax^2} \frac{d}{dx} e^{-i\xi x} \\ &= -\frac{\xi}{2a} \int dx e^{-ax^2} e^{-i\xi x} = -\frac{\xi}{2a} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\hat{f}(0) = \int dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Quindi $\hat{f}(\xi)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \hat{f}'(\xi) = -\frac{\xi}{2a} \hat{f}(\xi) \\ \hat{f}(0) = \sqrt{\pi/a} \end{cases}$$

da cui, per separazione delle variabili,

$$\int dx e^{-ax^2} e^{-i\xi x} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}. \quad (6.2)$$

6.4. Derivazione e convoluzione

6.4.1. Derivazione.

PROPOSIZIONE 6.5. Siano $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, $Df = f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\widehat{Df}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché

$$f(x) = f(0) + \int_0^x dy f'(y)$$

e $f' \in L^1(\mathbb{R})$, esistono finiti i limiti $f(\pm\infty)$ di $f(x)$ per $|x| \rightarrow \infty$. Ma allora, essendo $f \in L^1(\mathbb{R})$, necessariamente $f(\pm\infty) = 0$. Pertanto

$$\widehat{Df}(\xi) = \int dy f'(y) e^{-i\xi y} = f(y) e^{-i\xi y} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int dy f(y) (-i\xi) e^{-i\xi y} = i\xi \hat{f}(\xi).$$

□

PROPOSIZIONE 6.6. Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$, $xf \in L^1(\mathbb{R})$. Allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$D\hat{f}(\xi) = -i\xi \hat{f}(\xi).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int dy f(y) \frac{e^{-i(\xi+h)y} - e^{-i\xi y}}{h}.$$

Si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(y) \frac{e^{-i(\xi+h)y} - e^{-i\xi y}}{h} = f(y)(-iy)e^{-i\xi y} \quad \text{q. o.}$$

$$\left| f(y) \frac{e^{-i(\xi+h)y} - e^{-i\xi y}}{h} \right| \leq |f(y)|C|y|,$$

con $C = \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \left| \frac{e^{-i\eta} - 1}{\eta} \right|$. La tesi segue per convergenza dominata. $\square$

Iterando le tesi delle proposizioni precedenti deduciamo che

(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R})$, $Df, \dots, D^k f \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\widehat{D^k f}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi) \implies |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_k}{|\xi|^k},$$

con $C_k = \|D^k f\|_{L^1} < \infty$.

(ii) Se $f, xf, \dots, x^k f \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad \widehat{D^j f}(\xi) = (-i)^j \widehat{x^j f}(\xi), \quad j = 0, \dots, k.$$

6.4.2. Convoluzione. La convoluzione di due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ si indica con $f * g$ ed è definita ponendo

$$f * g(x) = \int dy f(x-y)g(y).$$

Per il teorema di Fubini $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, valendo in particolare la stima

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

(cfr. vedi il corso di Analisi Reale).

La trasformata di Fourier riduce l'operazione di convoluzione al semplice prodotto di funzioni. Infatti:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int dx \left[\int dy f(x-y)g(y) \right] e^{-i\xi x} = \int dy g(y) \left[\int dx f(x-y)e^{-i\xi x} \right] \\ &= \int dy g(y) \left[\int dx f(x-y)e^{-i\xi(x-y)} \right] e^{-i\xi y} \int dy g(y) \left[\int dz f(z)e^{-i\xi z} \right] e^{-i\xi y} \\ &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

6.5. Trasformata di Fourier in dimensione n

Per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si definisce

$$\widehat{f}(\xi) = \int dy f(y) e^{-i\xi \cdot y},$$

dove $\int dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \cdot y$ è il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$. I risultati discussi per $n = 1$ si estendono immediatamente al caso $n > 1$. Precisamente:

(a) *Esistenza e proprietà elementari:* Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\widehat{f}$ è ben definita. Inoltre

- (i) $\widehat{f}$ è limitata ($|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$) e continua;
- (ii) se $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$;
- (iii) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

(b) *Formula di inversione:* Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \int dy f(y) e^{i\xi \cdot (x-y)}.$$

(c) *Formule di derivazione:* Per $z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ poniamo $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. Allora:

- (1) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R})$, $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \leq k$, implica

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad |\alpha| \leq k.$$

- (2) $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n) \forall |\alpha| \leq k$, implica

$$\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n) \text{ con } \widehat{D^\alpha f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(\xi), \quad |\alpha| \leq k.$$

(d) *Formula di convoluzione:* Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Spazio di Schwartz e distribuzioni temperate

7.1. Premessa

Vogliamo estendere la trasformazione di Fourier alle funzioni generalizzate. Il modo naturale è per dualità: la trasformata $\hat{f}$ di $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dovrebbe definirsi ponendo

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle := \langle f, \hat{\psi} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Chiaramente questa definizione è ben posta solo se anche $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ma questo è falso tranne nel caso banale in cui ψ è identicamente nulla. Dimostriamo quest'ultima affermazione considerando per semplicità il caso $n = 1$.

Siano $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $R > 0$ tale che $\text{supp}(\psi) \subset [-R, R]$. Allora

$$\hat{\psi}(\xi) = \int dy e^{-i\xi y} \psi(y) = \sum_{k \geq 0} \frac{\xi^k}{k!} \int_{-R}^R dy (-iy)^k \psi(y) = \sum_{k \geq 0} C_k \xi^k,$$

con

$$|C_k| = \left| \frac{1}{k!} \int_{-R}^R dy (-iy)^k \psi(y) \right| \leq \frac{1}{k!} \int_{-R}^R dy |y|^k |\psi(y)| \leq \frac{2\|\psi\|_\infty R^{k+1}}{(k+1)!}.$$

In particolare, la serie di potenze

$$F(\zeta) = \sum_{k \geq 0} C_k \zeta^k, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

converge assolutamente in ogni compatto del piano complesso e definisce pertanto una funzione analitica su tutto $\mathbb{C}$.

Dunque $\hat{\psi}(\xi)$ è il valore sull'asse reale di una funzione analitica su tutto il piano complesso: $\hat{\psi}(\xi) = F(\xi + i0)$. La tesi è ora conseguenza del *Principio di identità delle funzioni analitiche*.¹ Se $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora $F \equiv 0$ su tutto $\mathbb{C}$. In particolare, $\hat{\psi} \equiv 0$ e quindi, per il Corollario 6.3, anche $\psi \equiv 0$.

Occorre pertanto allargare lo spazio delle funzioni di prova (dunque restringere lo spazio delle funzioni generalizzate).

7.2. Spazio delle funzioni a decrescenza rapida

Il legame tra le proprietà di regolarità e decadimento all'infinito della funzione e della sua trasformata suggeriscono la seguente definizione.

¹Se $f(z)$ è analitica in un aperto connesso Ω di $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$ è un punto di accumulazione di zeri di $f(z)$, allora $f(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$

DEFINIZIONE 7.1 (funzioni a decrescenza rapida). *Definiamo spazio delle funzioni a decrescenza rapida (detto anche “spazio di Schwartz”) lo spazio lineare topologico definito dall'insieme*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^p |D^\alpha \psi(x)| < \infty \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\},$$

dotato della seguente forma di convergenza: la successione $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se

$$x^\beta D^\alpha \psi_k(x) \rightarrow x^\beta D^\alpha \psi(x) \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R}^n,$$

per qualsiasi scelta dei multi-indice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Chiaramente $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Esempi di elementi di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono la gaussiana $\psi_1(x) = e^{-|x|^2}$ e più in generale funzioni della forma

$$\psi_2(x) = P(x)e^{-c|x|^{2m}+Q(x)},$$

con $P(x)$ polinomio qualsiasi, $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $Q(x)$ polinomio di grado inferiore a $2m$. Infatti tutte le derivate $D^\alpha \psi_2(x)$ hanno struttura analoga e quindi $|x|^p |D^\alpha \psi_2(x)|$ è limitata su $\mathbb{R}^n$.

Invece non appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le funzioni

$$\psi_3(x) = \frac{1}{1 + |x|^6}, \quad \psi_4(x) = e^{-|x|^2} \cos(e^{|x|^2})$$

(mentre vi appartiene $\psi_5(x) = e^{-|x|^4} \cos(e^{|x|^2})$).

PROPOSIZIONE 7.2. *Valgono i seguenti risultati di densità:*

(i) *Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.*

(ii) *Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione (i) segue dall'analogo risultato per $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, essendo quest'ultimo contenuto in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Per dimostrare (ii) fissiamo una qualsiasi funzione $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo la successione di funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\psi_k(x) = \psi(x) \eta\left(\frac{x}{k}\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

dove $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è tale che $\eta(x) = 1$ se $|x| \leq 1$. Asseriamo che $\psi_k \rightarrow \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per brevità di notazione consideriamo il caso $n = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} |x^p \psi(x) - x^p \psi_k(x)| &= |x^p \psi(x)| \left| 1 - \eta\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leq \sup_{|y| \geq k} |y^p \psi(y)|, \\ |x^p \psi'(x) - x^p \psi'_k(x)| &\leq |x^p \psi'(x)| \left| 1 - \eta\left(\frac{x}{k}\right) \right| + \frac{1}{k} \left| x^p \psi(x) \eta'\left(\frac{x}{k}\right) \right| \\ &\leq \sup_{|y| \geq k} |y^p \psi'(y)| + \frac{1}{k} \|\eta'\|_\infty \sup_{|y| \geq k} |y^p \psi(y)|, \\ |x^p \psi''(x) - x^p \psi''_k(x)| &\leq |x^p \psi''(x)| \left| 1 - \eta\left(\frac{x}{k}\right) \right| + \frac{2}{k} \left| x^p \psi'(x) \eta'\left(\frac{x}{k}\right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{k^2} \left| x^p \psi(x) \eta''\left(\frac{x}{k}\right) \right| \\ &\leq \sup_{|y| \geq k} |y^p \psi''(y)| + \frac{2}{k} \|\eta'\|_\infty \sup_{|y| \geq k} |y^p \psi'(y)| \\ &\quad + \frac{1}{k^2} \|\eta''\|_\infty \sup_{|y| \geq k} |y^p \psi(y)|, \\ |x^p D^q \psi(x) - x^p D^q \psi_k(x)| &\leq \dots \end{aligned}$$

I membri di destra sono tutti infinitesimi per $k \rightarrow \infty$ poiché $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

ESERCIZIO 7.1. Siano $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che

- (a) $\psi_k \rightarrow \psi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implica $\psi_k \rightarrow \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Viceversa, $\psi_k \rightarrow \psi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ non implica in generale che $\psi_k \rightarrow \psi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

7.3. Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

TEOREMA 7.3. *L'operazione di trasformata di Fourier,*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \widehat{f}(\xi), \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

è un isomorfismo lineare di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzitutto che $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possiamo affermare che

$$\mathcal{F}(\psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{con} \quad D^\alpha \mathcal{F}(\psi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \psi)(\xi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Inoltre, per ogni $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(\psi)(\xi) = \xi^\beta (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha \psi)(\xi) = \xi^\beta (-i)^{|\alpha|} i^{|\beta|} (i\xi)^\beta \mathcal{F}(x^\alpha \psi)(\xi).$$

Ma anche $x^\alpha \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per cui, in particolare,

$$\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha \psi))(\xi) = (i\xi)^\beta \mathcal{F}(x^\alpha \psi)(\xi).$$

In conclusione,

$$\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(\psi)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} i^{|\beta|} \mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha \psi))(\xi) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

da cui

$$|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(\psi)(\xi)| \leq \|D^\beta(x^\alpha \psi)\|_{L^1} < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

In particolare

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^p |D^\alpha \mathcal{F}(\psi)(\xi)| < \infty \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

ovvero $\mathcal{F}(\psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque $\mathcal{F}$ è un'applicazione di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Mostriamo ora che è un isomorfismo lineare:

(1) La linearità di $\mathcal{F}$ è ovvia ed è già stata osservata.

(2) La suriettività segue dalla formula di inversione. Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ poniamo

$$\psi^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\psi)(-x).$$

Chiaramente $\psi^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, per la formula di inversione,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \mathcal{F}(\psi)(\xi) e^{i\xi \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \mathcal{F}(\psi)(-\xi) e^{-i\xi \cdot x} \\ &= \int d\xi \psi^*(\xi) e^{-i\xi \cdot x} = \mathcal{F}(\psi^*)(x). \end{aligned}$$

(3) L'iniettività segue dalla proprietà della trasformata di determinare univocamente la funzione: $\mathcal{F}(\psi) = 0$ implica $\psi = 0$.

Abbiamo così mostrato che $\mathcal{F}$ è un isomorfismo lineare ed inoltre l'inversa $\mathcal{F}^{-1}$ è definita da

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\psi)(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dy \psi(y) e^{ix \cdot y}.$$

Rimane da dimostrare la continuità di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$. Verifichiamolo per $\mathcal{F}$, l'altro caso è analogo. Poiché $\mathcal{F}$ è lineare è sufficiente dimostrarne la continuità in $\psi = 0$. Sia quindi $\psi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(\psi_k)(\xi)| \leq \|D^\beta(x^\alpha \psi_k)\|_{L^1} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \psi_k)(x)| (1 + |x|^{n+1}) \int \frac{dx'}{1 + |x'|^{n+1}},$$

da cui la convergenza $\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(\psi_k)(\xi) \rightarrow 0$ uniforme in $\mathbb{R}^n$. Dunque $\mathcal{F}(\psi_k) \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

PROPOSIZIONE 7.4 (Identità di Parseval in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). *La trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ conserva (modulo un fattore $(2\pi)^n$) la norma ed il prodotto scalare di $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

$$\int d\xi \overline{\widehat{\psi}_1(\xi)} \widehat{\psi}_2(\xi) = (2\pi)^n \int dx \overline{\psi_1(x)} \psi_2(x) \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

da cui (con $\psi_1 = \psi_2 = \psi$)

$$\|\widehat{\psi}\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \|\psi\|_{L^2}^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, applicando la formula di inversione,

$$\begin{aligned} \int dx \overline{\psi_1}(x) \psi_2(x) &= \int dx \overline{\psi_1}(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \widehat{\psi_2}(\xi) e^{i\xi \cdot x} \\ &= \int d\xi \frac{1}{(2\pi)^n} \int dx \psi_1(x) e^{-i\xi \cdot x} \widehat{\psi_2}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi \overline{\widehat{\psi_1}(\xi)} \widehat{\psi_2}(\xi). \end{aligned}$$

□

7.4. Distribuzioni temperate

Possiamo ora introdurre la classe di funzioni generalizzate su cui sviluppare la teoria della trasformata di Fourier.

DEFINIZIONE 7.5. *Una distribuzione temperata è un funzionale lineare continuo $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Indichiamo con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle distribuzioni temperate.*

Poiché $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e la convergenza in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implica quella in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (vedi il punto (a) dell'Esercizio 7.1), ogni distribuzione temperata quando ristretta su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione generalizzata:

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Diremo allora che $J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è una *distribuzione temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$* se $J = T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ per qualche $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSIZIONE 7.6. (1) *Ogni distribuzione temperata è univocamente determinata dalla sua restrizione su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.* (2) *J è temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ se e solo se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle J, \psi_k \rangle = 0 \text{ per ogni } \{\psi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } \psi_k \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. Diamo solo una traccia della dimostrazione. Il punto (1) segue dal fatto che $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e le distribuzioni temperate sono funzioni continue di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per il punto (2) la necessità è ovvia, la sufficienza non la dimostriamo. □

Come nel caso delle funzioni generalizzate, anche per le distribuzioni temperate la proprietà di continuità può essere espressa in termini di una proprietà di limitatezza. Questo è il contenuto del seguente teorema che enunciamo senza dimostrazione.

TEOREMA 7.7 (Schwartz). *Un funzionale lineare $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se e solo se esistono un reale $C > 0$ ed un intero $p \geq 0$ tali che*

$$|\langle T, \psi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^p) |D^\alpha \psi(x)| \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

In particolare, ogni distribuzione temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ha ordine finito.

Osserviamo che $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio duale topologico di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dotato anch'esso di struttura lineare definendo, per ogni $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$,

$$\langle c_1 T_1 + c_2 T_2, \psi \rangle = c_1 \langle T_1, \psi \rangle + c_2 \langle T_2, \psi \rangle.$$

Possiede una topologia naturale, rispetto alla quale è anch'esso uno spazio lineare topologico:

DEFINIZIONE 7.8 (Convergenza debole in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). *La successione di distribuzioni $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge alla distribuzione $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle T_k, \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Lo spazio delle distribuzioni temperate è completo rispetto alla convergenza debole, come stabilito dal seguente teorema che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA 7.9 (Completezza di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). *Sia $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tale che il limite delle successioni numeriche $\{\langle T_k, \psi \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ esiste finito per ogni $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora l'applicazione $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo*

$$\langle T, \psi \rangle := \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle T_k, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

è una distribuzione temperata.

7.5. Esempi

7.5.1. Distribuzioni temperate regolari. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ una funzione a crescita lenta, ovvero tale che

$$\int dx \frac{|f(x)|}{1 + |x|^m} < \infty \quad \text{per qualche } m \in \mathbb{N}.$$

Allora la distribuzione regolare J_f definita mediante l'integrale,

$$\langle J_f, \psi \rangle = \int dx f(x) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

è una distribuzione temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ovvero si estende ad un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se $\{\psi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è tale che $\psi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$|\langle J_f, \psi_k \rangle| \leq \int dx |f(x)| |\psi_k(x)| \leq \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} (1 + |x'|^m) |\psi_k(x')| \int dx \frac{|f(x)|}{1 + |x|^m},$$

con l'estremo superiore nel membro di destra che tende a 0 per $k \rightarrow \infty$.

Si osservi inoltre che l'estensione T_f di J_f su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data dalla medesima media integrale,

$$\langle T_f, \psi \rangle = \int dx f(x) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

poiché il membro di destra è un funzionale continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che coincide con J_f su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che è un denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

7.5.2. Misure a crescita lenta. Analogamente al caso regolare, sia $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ una *misura a crescita lenta* (σ -additiva sull'algebra dei boreliani di $\mathbb{R}^n$), ovvero tale che

$$\int \mu_i(dx) \frac{1}{1+|x|^m} < \infty \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{per qualche } m \in \mathbb{N}.$$

Allora la distribuzione associata J_μ , definita da

$$\langle J_\mu, \psi \rangle = \int \mu(dx) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

è temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, e la sua estensione T_μ su $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è

$$\langle T_\mu, \psi \rangle = \int \mu(dx) \psi(x), \quad \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

In particolare, la funzione δ di Dirac (e le sue traslate δ_y) sono distribuzioni temperate.

7.6. Operazioni sulle distribuzioni temperate

Le operazioni sulle distribuzioni temperate si definiscono in completa analogia con quanto fatto per $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. In breve:

(A) La derivata $D^\alpha T$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, di una distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è definita come nel caso generale,

$$\langle D^\alpha T, \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

È ben definita, nel senso che $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Inoltre l'operatore di derivazione $D^\alpha: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è lineare e continuo.

(B) La sostituzione lineare delle variabili $\ell(x) = \ell_{A,b}(x) = Ax + b$ ($\det A \neq 0$) nella distribuzione temperata T ,

$$\langle T \circ \ell, \psi \rangle = \frac{\langle T, \psi \circ \ell^{-1} \rangle}{|\det A|}, \quad \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

definisce una distribuzione temperata e la mappa $T \rightarrow T \circ \ell$ è lineare e continua di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(C) Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $D^\alpha u$ sono funzioni a crescita lenta per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Allora l'applicazione $\psi \rightarrow u\psi$ è lineare e continua di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ne segue che possiamo definire la moltiplicazione per u di una distribuzione temperata T ponendo

$$\langle uT, \psi \rangle := \langle T, u\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Chiaramente è ben posta e la mappa $T \rightarrow uT$ è lineare e continua di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

OSSERVAZIONE 7.1. Si può dimostrare che per ogni distribuzione temperata T esiste una funzione a crescita lenta f ed un $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tale che $T = D^\alpha f$. Per tale motivo le distribuzioni temperate sono dette anche *distribuzioni a crescita lenta*.

ESERCIZIO 7.2. Rispondere ai seguenti quesiti:

- (1) Dimostrare che $\mathcal{D}'_x \frac{1}{x}$ è una distribuzione temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- (2) Dimostrare che $g(x) = e^{|x|^2}$ non è una distribuzione temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- (3) La serie

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \delta_{y_j}(x),$$

con $y_j = j\ell$, $\ell > 0$, definisce una distribuzione temperata in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ per qualsiasi scelta dei coefficienti $a_j > 0$? In caso negativo, esistono condizioni sui coefficienti $a_j > 0$ per cui sia temperata?

7.7. Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Consideriamo dapprima una funzione sommabile $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La sua trasformata di Fourier $\hat{f}$ è una funzione limitata e continua. Sia f che $\hat{f}$ definiscono (univocamente) delle distribuzioni temperate, T_f e $T_{\hat{f}}$. Per il teorema di Fubini, fissata $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha,

$$\begin{aligned} \langle T_{\hat{f}}, \psi \rangle &= \int d\xi \hat{f}(\xi) \psi(\xi) = \int d\xi \int dx f(x) e^{-i\xi \cdot x} \psi(\xi) \\ &= \int dx f(x) \int d\xi \psi(\xi) e^{-i\xi \cdot x} = \int dx f(x) \hat{\psi}(x) = \langle T_f, \hat{\psi} \rangle. \end{aligned}$$

Assumiamo allora questa identità come definizione della trasformata di Fourier di una qualsiasi distribuzione temperata: per ogni $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la sua trasformata $\hat{T}$ è definita ponendo

$$\langle \hat{T}, \psi \rangle = \langle T, \hat{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA 7.10. *L'operazione di trasformata di Fourier $T \rightarrow \mathcal{F}(T) = \hat{T}$ è un isomorfismo lineare di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ su $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordando che $\mathcal{F}$ è un isomorfismo di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possiamo asserire che

- (i) $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e l'applicazione $\mathcal{F}$ è lineare e continua di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in sé.
- (ii) $\mathcal{F}$ è iniettiva poiché $\mathcal{F}(T) = 0$ significa $\langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $\langle T, \hat{\psi} \rangle = 0$ per ogni $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Infine, introduciamo la trasformazione $\mathcal{F}^{-1}$ secondo la formula

$$\mathcal{F}^{-1}(T) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(T \circ \ell_{-\mathbb{I},0}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(T(-x)).$$

Chiaramente $\mathcal{F}^{-1}$ è lineare e continua di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in sé. Mostriamo che è l'inversa di $\mathcal{F}$. Si ha

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)), \psi \rangle &= \frac{\langle \mathcal{F}(\mathcal{F}(T) \circ \ell_{-\mathbb{I},0}), \psi \rangle}{(2\pi)^n} = \frac{\langle \mathcal{F}(T) \circ \ell_{-\mathbb{I},0}, \mathcal{F}(\psi) \rangle}{(2\pi)^n} \\ &= \frac{\langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(\psi) \circ \ell_{-\mathbb{I},0} \rangle}{(2\pi)^n} = \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\psi)) \rangle = \langle T, \psi \rangle.\end{aligned}$$

Analogamente, $\langle \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)), \psi \rangle = \langle T, \psi \rangle$. □

Discutiamo ora alcune proprietà della trasformata di Fourier:

(a) *Differenziazione della trasformata.* Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ allora

$$D^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha T).$$

Infatti, per ogni $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha \mathcal{F}(T), \psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}(T), D^\alpha \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}(D^\alpha \psi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, (ix)^\alpha \mathcal{F}(\psi) \rangle = \langle (-ix)^\alpha T, \mathcal{F}(\psi) \rangle = \langle \mathcal{F}((-ix)^\alpha T), \psi \rangle.\end{aligned}$$

(b) *Trasformata della derivata.* Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ allora

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T).$$

Infatti, per ogni $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(D^\alpha T), \psi \rangle &= \langle D^\alpha T, \mathcal{F}(\psi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{F}((-i\xi)^\alpha \psi) \rangle = \langle \mathcal{F}(T), (i\xi)^\alpha \psi \rangle = \langle (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T), \psi \rangle.\end{aligned}$$

(c) *Trasformata e traslazioni.* Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$ allora

$$\mathcal{F}(T \circ \ell_{0,b}) = e^{ib \cdot \xi} \mathcal{F}(T), \quad \mathcal{F}(T) \circ \ell_{0,b} = \mathcal{F}(e^{-ib \cdot x} T).$$

Infatti, per ogni $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T \circ \ell_{0,b}), \psi \rangle &= \langle T \circ \ell_{0,b}, \mathcal{F}(\psi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi) \circ \ell_{0,-b} \rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(e^{ib \cdot x} \psi) \rangle = \langle e^{ib \cdot x} \mathcal{F}(T), \psi \rangle, \\ \langle \mathcal{F}(T) \circ \ell_{0,b}, \psi \rangle &= \langle \mathcal{F}(T), \psi \circ \ell_{0,-b} \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi \circ \ell_{0,-b}) \rangle \\ &= \langle T, e^{-ib \cdot \xi} \mathcal{F}(\psi) \rangle = \langle \mathcal{F}(e^{-ib \cdot x} T), \psi \rangle.\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\xi - b) &= \int dx \psi(x) e^{-i(\xi-b) \cdot x} = \int dx \left[\psi(x) e^{ib \cdot x} \right] e^{-i\xi \cdot x} = \mathcal{F}(\psi e^{ib \cdot x}), \\ \mathcal{F}(\psi \circ \ell_{0,-b})(\xi) &= \int dx \psi(x-b) e^{-i\xi \cdot x} = e^{-ib \cdot \xi} \widehat{\psi}(\xi).\end{aligned}$$

Vediamo infine alcuni esempi.

(1) *Trasformata della δ di Dirac.* Per $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\langle \mathcal{F}(\delta), \psi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}(\psi) \rangle = \mathcal{F}(\psi)(0) = \int dx \psi(x) = \langle T_1, \psi \rangle.$$

Quindi la trasformata $\mathcal{F}(\delta)$ è una distribuzione regolare, precisamente

$$\widehat{\delta}(\xi) = 1.$$

Applicando ora la formula per la trasformata di una traslazione, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mathcal{F}(\delta_y) = \mathcal{F}(\delta \circ \ell_{\mathbb{I}, -y}) = e^{-iy \cdot \xi} \mathcal{F}(\delta) = T_{e^{-iy \cdot \xi}},$$

ovvero

$$\widehat{\delta}_y(\xi) = e^{-iy \cdot \xi}.$$

(2) *Trasformata delle derivate della δ di Dirac.* Per la formula sulla trasformata delle derivate di una distribuzione:

$$\mathcal{F}(D^\alpha \delta) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\delta) = (i\xi)^\alpha.$$

(3) *Trasformata dei monomi.* Per la formula di inversione,

$$\delta = \mathcal{F}^{-1}(1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(1 \circ \ell_{-\mathbb{I}, 0}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(1),$$

da cui $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta$. Inserendo $T = 1$ nella formula per la differenziazione della trasformata otteniamo

$$(2\pi)^n D^\alpha \delta = \mathcal{F}((-ix)^\alpha),$$

e quindi

$$\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta.$$

7.8. Calcolo delle soluzioni fondamentali con la trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier è uno strumento molto efficace per calcolare le soluzioni fondamentali dei diversi problemi differenziali che affronteremo. Il punto chiave è che in trasformata di Fourier l'operatore di derivazione si trasforma in moltiplicazione per la variabile ξ , il che permette di ricondurre un'equazione alle derivate parziali a un'equazione differenziale ordinaria o a un'equazione algebrica. In questa sezione presentiamo questo metodo ricalcolando la soluzione fondamentale dell'equazione delle onde in $d = 1$.

Partiamo dalla Proposizione 5.13 dove abbiamo caratterizzato la funzione di Green come soluzione del problema di Cauchy (5.1). Visto che l'equazione (5.1) ha coefficienti costanti abbiamo

$$K(x, y, t) = K(x - y, 0, t) = K(x - y, t),$$

con $K(x, t)$ soluzione del problema analogo con $y = 0$. Cerchiamo $K(x, t)$ mediante la sua trasformata di Fourier rispetto alla variabile spaziale. Sia quindi

$$\widehat{K}(\xi, t) = \mathcal{F}(K(\cdot, t)) = \int dx K(x, t) e^{-i\xi x}.$$

Sostituendo nell'equazione troviamo che $\widehat{K}(\xi, t)$ risolve il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{K}}{\partial t^2}(\xi, t) = c^2 (\mathrm{i}\xi)^2 \widehat{K}(\xi, t) & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \widehat{K}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{K}}{\partial t}(\xi, 0) = 1 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Quindi $t \mapsto \widehat{K}(\xi, t)$ è un oscillatore armonico di pulsazione $\omega = c|\xi|$, posizione iniziale nulla e impulso iniziale pari a 1. Pertanto

$$\widehat{K}(\xi, t) = \frac{1}{c|\xi|} \sin(c|\xi|t) = \frac{1}{2c} \frac{2\sin(ct\xi)}{\xi} = \frac{1}{2c} \widehat{\chi}_{[-ct, ct]}(\xi).$$

Eseguendo la trasformazione di Fourier inversa troviamo

$$K(x, t) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x),$$

da cui

$$K(x, y, t) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x - y) = \frac{1}{2c} [\mathcal{H}(x - y + ct) - \mathcal{H}(x - y - ct)]$$

(quasi ovunque).

Equazione delle onde in dimensione $d > 1$

8.1. Problemi ben posti e questioni di unicità

L'equazione delle onde in dimensione $d = 2, 3$ è idonea a descrivere diversi fenomeni fisici, quali, ad esempio, le piccole vibrazioni di una membrana elastica attorno alla sua posizione di equilibrio, la propagazione del campo elettromagnetico nel vuoto, o delle onde sonore in un fluido omogeneo. I tipici problemi ben posti cui si perviene sono l'analogo multidimensionale di quanto visto per le vibrazioni della corda. Formuliamo i tre problemi classici nel caso dell'equazione d'onda generalizzata.

- (1) *Problema di Cauchy globale.* La funzione incognita $u = u(x, t)$ è definita su tutto lo spazio, pertanto il problema corrispondente è

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - \gamma u + f & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (8.1)$$

- (2) *Problema di Cauchy-Dirichlet.* Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio regolare limitato con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 . La funzione incognita $u = u(x, t)$ è soluzione dell'equazione d'onda su $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ed il suo valore $a(x, t)$ sulla frontiera di Ω è preassegnato. Il problema corrispondente è pertanto

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - \gamma u + f & \text{in } Q_T, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega}, \\ u(x, t) = a(x, t) & \text{per } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (8.2)$$

- (3) *Problema di Cauchy-Neumann.* Come in (2), con la differenza che viene assegnato il valore $b(x, t)$ della derivata normale della funzione incognita sulla frontiera di Ω . Ricordiamo che se $\nu = \nu(x)$ è la normale esterna a Ω nel punto $x \in \partial\Omega$, la derivata direzionale lungo ν della funzione u è

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \nu \cdot \nabla u(x). \quad (8.3)$$

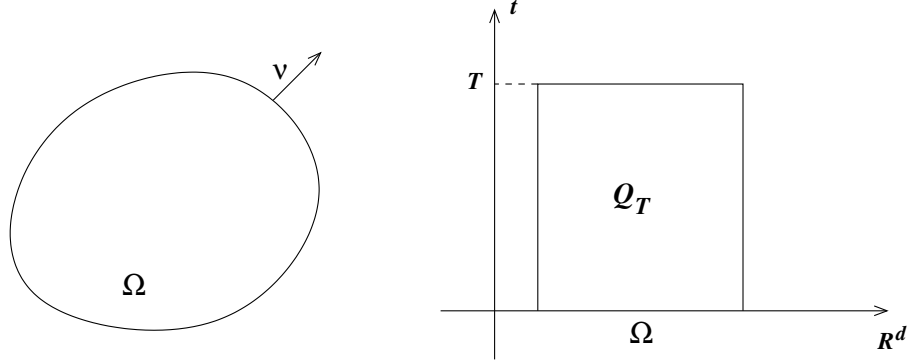


FIGURA 8.1. Il dominio Ω , la normale esterna ν ed il cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$.

Otteniamo così il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - \gamma u + f & \text{in } Q_T, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = b(x, t) & \text{per } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (8.4)$$

Per dimostrare l'unicità della soluzione classica dei problemi (8.2) e (8.4) possiamo utilizzare nuovamente la conservazione dell'energia. Precisamente, per ogni funzione $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ associamo l'energia al tempo t ,

$$E(u, t) = \int_{\Omega} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\gamma}{2} u^2 \right].$$

Sussiste allora la seguente generalizzazione del Teorema 3.1.

TEOREMA 8.1. *Sia $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ed $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ una soluzione dell'equazione omogenea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) - \gamma u(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8.5)$$

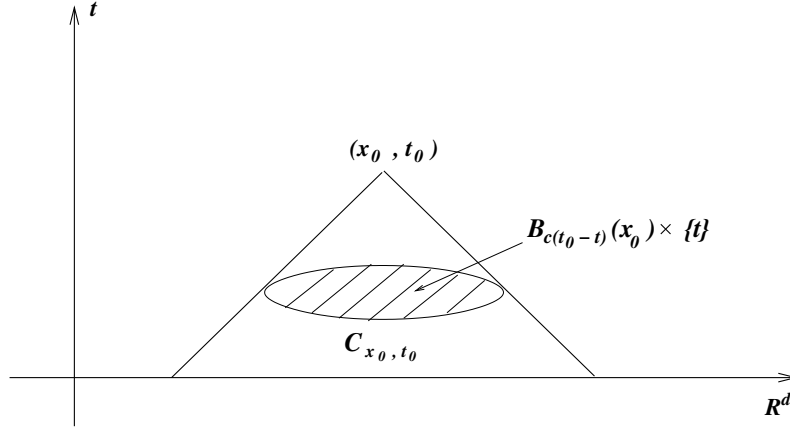
con condizioni al bordo di Dirichlet indipendenti dal tempo oppure di Neumann omogenee. Allora $E(u, t) = E(u, 0)$ per ogni $t \in [0, T]$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che $\frac{d}{dt} E(u, t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Si ha, usando al solito il teorema di Schwarz,

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma u \right) + c^2 \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right].$$

Ma per la I Formula di Green (vedi Sezione 9.5) con $\nu = \frac{\partial u}{\partial t}$ si ha,

$$\int_{\Omega} dx \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \int_{\partial\Omega} d\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} dx \frac{\partial u}{\partial t} \Delta u.$$

FIGURA 8.2. Cono caratteristico retrogrado con vertice in (x_0, t_0) .

Pertanto,

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \int_{\Omega} dx \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u + \gamma u \right) + c^2 \int_{\partial \Omega} d\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

□

Ragionando esattamente come nella dimostrazione del Teorema 3.2 otteniamo il seguente risultato di unicità.

TEOREMA 8.2. *Per ogni $T > 0$, per fissati dati iniziali e al bordo, esiste al più una soluzione in $C^2(\overline{Q}_T)$ dei problemi (8.2) e (8.4).*

Consideriamo ora il problema di Cauchy globale (8.1). Fissato un punto (x_0, t_0) nello spazio-tempo, definiamo *cono caratteristico retrogrado* con vertice in (x_0, t_0) l'insieme

$$C_{x_0, t_0} = \{(x, t) : |x - x_0| < c(t_0 - t), t \in [0, t_0]\} = \bigcup_{t \in [0, t_0]} B_{c(t_0-t)}(x_0) \times \{t\},$$

dove $B_r(z) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - z| < r\}$ è la bolla di centro z e raggio r , vedi Figura 8.2

LEMMA 8.3. *Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ una soluzione classica di*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - \gamma u$$

e poniamo

$$e(t) = \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\gamma}{2} u^2 \right], \quad t \in [0, t_0].$$

Allora $\dot{e}(t) \leq 0$ per ogni $t \in [0, t_0]$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $S_r(z)$ la frontiera $\partial B_r(z)$ della bolla $B_r(z)$. Si ha, derivando ed usando la I Formula di Green come fatto in precedenza,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^{c(t_0-t)} dr \int_{S_r(x_0)} d\sigma \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\gamma}{2} u^2 \right] \\ &= -\frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} d\sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\nabla u|^2 + \gamma u^2 \right] \\ &\quad + \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} dx \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma u \right) + c^2 \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} d\sigma \left[2c \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 |\nabla u|^2 - \gamma u^2 \right]. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} 2c \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 |\nabla u|^2 &\leq 2c \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| |\nabla u| - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - c^2 |\nabla u|^2 \\ &= - \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| - c |\nabla u| \right)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

pertanto $\dot{e}(t) \leq 0$. □

TEOREMA 8.4. *Esiste al più una soluzione in $C^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ del problema (8.1).*

DIMOSTRAZIONE. La differenza $u = u_1 - u_2$ di due soluzioni u_1, u_2 dello stesso problema soddisfa l'equazione omogenea con dati iniziali nulli. Quindi ad u si applica il lemma precedente e si ricava $\dot{e}(t) \leq 0$ per ogni (x_0, t_0) ; ma avendo dati iniziali nulli è anche $e(0) = 0$, da cui, essendo $e(t) \geq 0$, ricaviamo che $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0, t_0]$. Per continuità segue che $u(x_0, t_0) = 0$ necessariamente. □

In verità abbiamo dimostrato un risultato più forte. Fissato (x_0, t_0) siano u_1, u_2 due soluzioni del problema (8.1) di dati iniziali g_1, h_1 e g_2, h_2 e forzanti f_1, f_2 tali che

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_2(x), \quad h_1(x) = h_2(x) \quad \forall x \in B_{c t_0}(x_0), \\ f_1(x, t) &= f_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in C_{x_0, t_0}. \end{aligned}$$

Lo stesso argomento implica in questo caso che $u_1(x_0, t_0) = u_2(x_0, t_0)$. Quindi la velocità di propagazione di un segnale (o perturbazione) è finita e stimata dal parametro c . Altrimenti detto, se modifichiamo dati iniziali e forzanti al di fuori del cono retrogrado di un punto (x_0, t_0) la soluzione in quel punto rimane invariata.

8.2. Separazione delle variabili per problemi in domini limitati

Per risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet (o Neumann-Dirichlet) omogeneo in un dominio limitato Ω con condizioni al bordo omogenee si può procedere (almeno formalmente) con il metodo di Fourier come fatto nel caso dell'equazione della corda finita. Per brevità limitiamoci a considerare il caso dell'equazione delle onde pura ($\gamma = 0$) ed omogenea ($f = 0$). Si cerca pertanto la soluzione come espansione in un sistema di autofunzioni per il relativo problema agli autovalori. Tale problema è ovviamente

$$\begin{cases} \Delta v = \lambda v & \text{in } \Omega, \\ v(x) = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.6)$$

per il problema di Dirichlet, e

$$\begin{cases} \Delta v = \lambda v & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.7)$$

per il problema di Neumann.

Se determiniamo un insieme numerabile $\{\lambda_n, v_n(x)\}$ di autofunzioni e autovalori possiamo provare a cercare la soluzione nella forma

$$u(x, t) = \sum_n W_n(t) v_n(x),$$

con $W_n(t)$ soluzione di $\ddot{W}_n(t) = \lambda_n c^2 W_n(t)$. Le condizioni iniziali $W_n(0)$, $\dot{W}_n(0)$ sono supposte essere determinate richiedendo che

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_n W_n(0) v_n(x), \quad h(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_n \dot{W}_n(0) v_n(x).$$

Pur non entrando nella teoria generale sul problema agli autovalori, segnaliamo che sotto opportune ipotesi di regolarità sul dominio Ω è possibile dimostrare che entrambi i problemi (8.6) e (8.7) ammettono un sistema di autofunzioni e autovalori $\{v_n(x), \lambda_n\}$ con le seguenti proprietà:

(Dirichlet): $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \rightarrow -\infty$, $\int_{\Omega} dx v_j(x) v_k(x) = 0$ se $j \neq k$.

(Neumann): $0 = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \rightarrow -\infty$, $v_0(x) = 1$, $\int_{\Omega} dx v_j(x) v_k(x) = 0$ se $j \neq k$.

In particolare, le $W_n(t)$ per $n \geq 1$ sono oscillatori armonici di frequenza $\omega_n = \sqrt{-\lambda_n c^2}$. Inoltre, per l'ortogonalità delle autofunzioni, i dati iniziali $W_n(0)$ e $\dot{W}_n(0)$ sono effettivamente determinati in termini di g e h , precisamente,

$$W_n(0) = \frac{\int_{\Omega} dx g v_n}{\int_{\Omega} dx v_n^2}, \quad \dot{W}_n(0) = \frac{\int_{\Omega} dx h v_n}{\int_{\Omega} dx v_n^2}.$$

Alcune delle proprietà sopra esposte seguono dal fatto che il laplaciano con le condizioni al bordo di Dirichlet/Neumann omogenee è un operatore simmetrico non positivo sullo spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$ delle funzioni su Ω a quadrato

sommabile. Infatti, se la coppia $\psi, \phi \in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfa le condizioni di Dirichlet omogenee oppure quelle di Neumann omogenee allora

$$\int_{\Omega} dx \psi \Delta \phi = \int_{\partial\Omega} d\sigma \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \int_{\Omega} dx \nabla \psi \cdot \nabla \phi = - \int_{\Omega} dx \nabla \psi \cdot \nabla \phi.$$

Pertanto, riscrivendo la precedente identità invertendo i ruoli di ϕ, ψ , concludiamo che

$$\int_{\Omega} dx \psi \Delta \phi = \int_{\Omega} dx \Delta \psi \phi = - \int_{\Omega} dx \nabla \psi \cdot \nabla \phi,$$

che dimostra la simmetria e la non positività (ovvero che $\int_{\Omega} dx \psi \Delta \psi \leq 0$ per ogni ψ che soddisfa le condizioni di Dirichlet/Neumann omogenee). In particolare, se supponiamo esistere il sistema $\{\lambda_n, v_n(x)\}$, deve aversi

$$\lambda_n \int_{\Omega} dx v_n v_k = \int_{\Omega} dx \Delta v_n v_k = - \int_{\Omega} dx \nabla v_n \cdot \nabla v_k \quad \forall n, k,$$

da cui

i) $(\lambda_n - \lambda_k) \int_{\Omega} dx v_n v_k = 0$, che implica $\int_{\Omega} dx v_n v_k = 0$ per $n \neq k$.

ii) $\lambda_n \int_{\Omega} dx v_n^2 = - \int_{\Omega} dx |\nabla v_n|^2$, che implica $\lambda_n \leq 0$. Inoltre $\lambda_n = 0$ è possibile se e solo se v_n è costante, che nel caso delle condizioni di Dirichlet implica la soluzione banale $v_n = 0$, dunque l'assenza dell'autovalore nullo, mentre nel caso delle condizioni di Neumann l'autovalore $\lambda_0 = 0$ con $v_0(x) = 1$ è presente.

Concludiamo la sezione con l'analisi delle *vibrazioni libere di una membrana rettangolare*, in cui il metodo di separazione delle variabili permette di calcolare la soluzione formale del problema in modo esplicito. Precisamente, consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega}, \\ u(x, t) = 0 & \text{per } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty), \end{cases} \quad (8.8)$$

dove $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 \in (0, L_1), x_2 \in (0, L_2)\}$ con $L_1, L_2 > 0$ assegnati. Dobbiamo quindi cercare tutte le soluzioni (λ, V) del problema agli autovalori,

$$\begin{cases} \Delta V(x) = \lambda V(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ V(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.9)$$

Cerchiamo anche la soluzione di tale problema per separazione delle variabili. Se $V(x) = X(x_1)Y(x_2)$ è soluzione allora

$$\begin{cases} X''(x_1)Y(x_2) + X(x_1)Y''(x_2) = \lambda X(x_1)Y(x_2), \\ X(0) = X(L_1) = Y(0) = Y(L_2) = 0. \end{cases}$$

Laddove $X(x_1)Y(x_2) \neq 0$ possiamo riscrivere la prima equazione nella forma

$$\frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = \lambda - \frac{Y''(x_2)}{Y(x_2)}.$$

Pertanto i due membri della precedente equazione devono essere uguali ad una costante. Detta μ tale costante concludiamo che X, Y sono soluzioni dei problemi agli autovalori,

$$\begin{cases} X''(x_1) = \mu X(x_1), \\ X(0) = X(L_1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(x_2) = (\lambda - \mu) Y(x_2), \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases}$$

Sappiamo risolvere questi problemi, precisamente

$$X_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x_1\right), \quad \mu_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L_1^2}, \quad n \geq 1,$$

$$Y_k(x_2) = \sin\left(\frac{k\pi}{L_2} x_2\right), \quad \lambda_{n,k} - \mu_n = -\frac{k^2 \pi^2}{L_2^2}, \quad k \geq 1.$$

Troviamo in tal modo un'infinità di soluzioni $(V_{n,k}, \lambda_{n,k})$ del problema (8.9), indicizzata dai due interi $n, k \geq 1$,

$$V_{n,k}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_1} x_1\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L_2} x_2\right), \quad \lambda_{n,k} = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{k^2}{L_2^2} \right).$$

La soluzione del problema (8.8) si può cercare quindi come sovrapposizione,

$$u(x, t) = \sum_{n,k \geq 1} W_{n,k}(t) V_{n,k}(x),$$

con $W_{n,k}(t)$ soluzioni di $\ddot{W}_{n,k}(t) = \lambda_{n,k} c^2 W_{n,k}(t)$, ovvero

$$W_{n,k}(t) = A_{n,k} \cos(\omega_{n,k} t) + B_{n,k} \sin(\omega_{n,k} t), \quad \omega_{n,k} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{k^2}{L_2^2}}.$$

Le costanti $A_{n,k}, B_{n,k}$ si determinano imponendo le condizioni iniziali e sono pertanto legate ai coefficienti dello sviluppo in serie doppia di seni delle funzioni $g(x)$ e $h(x)$.

8.3. Soluzione fondamentale dell'equazione delle onde in $d = 3$

Cerchiamo la funzione di Green soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = c^2 \Delta K & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ K(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial t}(x, y, 0) = \delta_y(x) & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Come nel caso in $d = 1$ si ha

$$K(x, y, t) = K(x - y, 0, t) = K(x - y, t),$$

con $K(x, t)$ soluzione del problema analogo con $y = 0$. Calcoliamo $K(x, t)$ attraverso la sua trasformata di Fourier rispetto alla variabile spaziale,

$$\hat{K}(\xi, t) = \mathcal{F}(K(\cdot, t)) = \int dx K(x, t) e^{-i\xi \cdot x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Poiché

$$\mathcal{F}(\Delta T) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^3 (i\xi_i)^2 \mathcal{F}(T) = -|\xi|^2 \mathcal{F}(T),$$

deduciamo che, analogamente al caso $d = 1$, deve aversi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{K}}{\partial t^2}(\xi, t) = -c^2 |\xi|^2 \widehat{K}(\xi, t) & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ \widehat{K}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{K}}{\partial t}(\xi, 0) = 1 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

ovvero (oscillatori armonici di pulsazione $\omega = c|\xi|$)

$$\widehat{K}(\xi, t) = \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}.$$

La distribuzione $K(x, t)$ è allora individuata dall'equazione

$$\langle \widehat{K}, \psi \rangle = \langle K, \widehat{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Si ha ora

$$\begin{aligned} \langle \widehat{K}, \psi \rangle &= \int d\xi \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \psi(\xi) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \psi(\xi) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx \widehat{\psi}(x) e^{i\xi \cdot x} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int dx \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} e^{i\xi \cdot x} \right] \widehat{\psi}(x) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int dx Q_A(x, t) \widehat{\psi}(x), \end{aligned}$$

dove

$$Q_A(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} e^{i\xi \cdot x}.$$

Per calcolare $Q_A(x, t)$ eseguiamo l'integrazione rispetto alla variabile ξ mediante le coordinate sferiche in cui l'asse verticale ha direzione e verso di x . Dunque

$$\xi = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad d\xi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad \xi \cdot x = r|x| \cos \theta,$$

cosicché

$$\begin{aligned} Q_A(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^A dr r^2 \frac{\sin(ctr)}{cr} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ir|x| \cos \theta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 c} \int_0^A dr r \sin(ctr) \int_{-1}^1 d\eta e^{ir|x| \eta} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 c} \int_0^A dr r \sin(ctr) \frac{e^{ir|x|} - e^{-ir|x|}}{ir|x|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 c|x|} \int_0^A dr \sin(ctr) \sin(r|x|). \end{aligned}$$

Scrivendo infine

$$\sin(ctr) \sin(r|x|) = \frac{1}{2} \cos[r(|x| - ct)] - \frac{1}{2} \cos[r(|x| + ct)]$$

ed eseguendo l'integrazione nella variabile radiale r otteniamo

$$Q_A(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 c |x|} \left(\frac{\sin[A(|x| - ct)]}{|x| - ct} - \frac{\sin[A(|x| + ct)]}{|x| + ct} \right).$$

Dobbiamo ora calcolare il limite per $A \rightarrow \infty$ dell'integrale

$$\begin{aligned} \int dx Q_A(x, t) \hat{\psi}(x) &= \int_0^\infty dr \int_{S_r(0)} d\sigma(q) Q_A(q, t) \hat{\psi}(q) \\ &= \int_0^\infty dr r^2 \int_{S_1(0)} d\sigma(n) Q_A(rn, t) \hat{\psi}(rn), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio siamo passati dall'integrazione sulla superficie sferica di raggio r a quella di raggio 1. Inserendo la forma esplicita di $Q_A(x, t)$ (che dipende solo da $|x| = r$) si ha

$$\begin{aligned} \int dx Q_A(x, t) \hat{\psi}(x) &= \int_0^\infty dr \frac{r}{4\pi^2 c} \left(\frac{\sin[A(r - ct)]}{r - ct} - \frac{\sin[A(r + ct)]}{r + ct} \right) \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \hat{\psi}(rn) \\ &= \int_0^\infty dr \frac{\sin[A(r - ct)]}{r - ct} G(r) - \int_0^\infty dr \frac{\sin[A(r + ct)]}{r + ct} G(r), \end{aligned}$$

avendo posto

$$G(r) = \frac{r}{4\pi^2 c} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \hat{\psi}(rn).$$

Eseguiamo la sostituzione $z = r - ct$ nel primo integrale e $z = r + ct$ nel secondo. Otteniamo in tal modo

$$\int dx Q_A(x, t) \hat{\psi}(x) = J_1(A) + J_2(A),$$

con

$$\begin{aligned} J_1(A) &= \int_{-ct}^{ct} dz \frac{\sin Az}{z} G(z + ct), \\ J_2(A) &= \int_{ct}^\infty dz \frac{\sin Az}{z} [G(z + ct) - G(z - ct)]. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente il limite per $A \rightarrow \infty$ di $J_1(A)$ e $J_2(A)$.

(i) Scriviamo

$$\begin{aligned} J_1(A) &= G(ct) \int_{-ct}^{ct} dz \frac{\sin Az}{z} + \int_{-ct}^{ct} dz \frac{\sin Az}{z} [G(z + ct) - G(ct)] \\ &= G(ct) \int_{-ctA}^{ctA} dz' \frac{\sin z'}{z'} + \int_{-ct}^{ct} dz \frac{\sin Az}{z} [G(z + ct) - G(ct)]. \end{aligned}$$

Per $A \rightarrow \infty$, il primo integrale tende a π mentre il secondo tende a zero poiché $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (dopo averla estesa, ad esempio a supporto compatto su $\mathbb{R}_-$). In realtà basta $G \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, vedi la dimostrazione del Teorema 6.2 sulla formula di inversione. Quindi

$$\lim_{A \rightarrow \infty} J_1(A) = \pi G(ct).$$

(ii) Scriviamo, integrando per parti,

$$J_2(A) = \int_{ct}^{\infty} dz \frac{\sin Az}{z} [G(z+ct) - G(z-ct)] = -\frac{\cos Az}{A} \frac{G(z+ct) - G(z-ct)}{z} \Big|_{ct}^{\infty} \\ + \frac{1}{A} \int_{ct}^{\infty} dz \cos Az \frac{d}{dz} \frac{G(z+ct) - G(z-ct)}{z},$$

da cui, essendo $G(0) = G(\infty) = 0$,

$$|J_2(A)| \leq \frac{|G(2ct)|}{ctA} + \frac{1}{A} \int_{ct}^{\infty} dz \left| \frac{d}{dz} \frac{G(z+ct) - G(z-ct)}{z} \right|.$$

Poiché $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'integrale a destra è convergente. Concludiamo che

$$\lim_{A \rightarrow \infty} J_2(A) = 0.$$

In conclusione, abbiamo ottenuto

$$\langle \hat{K}, \psi \rangle = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \hat{\psi}(ctn) = \frac{t}{4\pi(ct)^2} \int_{S_{ct}(0)} d\sigma(q) \hat{\psi}(q),$$

ovvero

$$\langle \hat{K}, \psi \rangle = tM_{\hat{\psi}}(0, ct),$$

avendo introdotto la notazione

$$M_{\phi}(z, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(z)} d\sigma(q) \phi(q)$$

per indicare la media aritmetica della funzione ϕ sulla superficie sferica $S_r(z)$.

Una scrittura equivalente della formula trovata è la seguente:

$$\langle \hat{K}, \psi \rangle = \int_0^{\infty} dr \delta(r-ct) \frac{t}{4\pi(ct)^2} \int_{S_{ct}(0)} d\sigma(q) \hat{\psi}(q) \\ = \int_0^{\infty} dr \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta(r-ct)}{r} \int_{S_r(0)} d\sigma(q) \hat{\psi}(q) = \int dx \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta(|x|-ct)}{|x|} \hat{\psi}(x),$$

da cui

$$K(x, t) = \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta(|x|-ct)}{|x|} = \frac{\delta_{S_{ct}(0)}(x)}{4\pi c^2 t}.$$

avendo introdotto, assegnata una superficie regolare S , la distribuzione $\delta_S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ definita dall'integrale di superficie

$$\langle \delta_S, \psi \rangle = \int_S d\sigma(q) \psi(q).$$

Tornando al problema con impulso iniziale $\delta_y(x)$, abbiamo infine

$$K(x, y, t) = \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta(|x-y|-ct)}{|x-y|} = \frac{\delta_{S_{ct}(y)}(x)}{4\pi c^2 t},$$

ovvero

$$\langle K, \psi \rangle = \int dx K(x, y, t) \psi(x) = tM_{\psi}(y, ct).$$

8.4. Formula di Kirchhoff

In questa sezione costruiamo la soluzione esplicita del problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde omogenea in dimensione $d = 3$.

TEOREMA 8.5. *Siano $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Allora l'unica soluzione in $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (8.10)$$

è data dalla formula di Kirchhoff,

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) h(y).$$

Scomponiamo la dimostrazione in tre lemmi.

LEMMA 8.6. *Sia $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Allora l'unica soluzione in $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ del problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (8.11)$$

è

$$W_\varphi(x, t) = \int dy K(x, y, t) \varphi(y) = t M_\varphi(x, ct).$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial t}(x, t) = M_\varphi(x, ct) + t \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, ct)$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, ct) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\varphi(x, ct).$$

Calcoliamo le derivate della media, che scriviamo nella forma

$$M_\varphi(x, ct) = \frac{1}{4\pi (ct)^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \varphi(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \varphi(x + ct n).$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, ct) &= \frac{c}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \nabla \varphi(x + ct n) \cdot n = \frac{1}{4\pi c t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \nabla \varphi(y) \cdot \nu(y) \\ &= \frac{1}{4\pi c t^2} \int_{B_{ct}(x)} dy \Delta \varphi(y), \end{aligned}$$

con $v(y)$ la normale esterna a $S_{ct}(x)$ nel punto y ed avendo applicato il teorema della divergenza nell'ultima uguaglianza. Pertanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\varphi(x, ct) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c t^2} \int_{B_{ct}(x)} dy \Delta \varphi(y) \right] \\ &= -\frac{2}{t} \left[\frac{1}{4\pi c t^2} \int_{B_{ct}(x)} dy \Delta \varphi(y) \right] + \frac{1}{4\pi c t^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{ct} dr \int_{S_r(x)} d\sigma(y) \Delta \varphi(y) \\ &= -\frac{2}{t} \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, ct) + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \Delta \varphi(y),\end{aligned}$$

cosicché

$$\frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \Delta \varphi(y).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\Delta M_\varphi(x, ct) &= \Delta \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \varphi(x + ct n) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \Delta \varphi(x + ct n) \\ &= \frac{1}{4\pi (ct)^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \Delta \varphi(y).\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta W_\varphi(x, t) = t \Delta M_\varphi(x, ct) = \frac{1}{4\pi t c^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \Delta \varphi(y) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}(x, t),$$

ovvero $W_\varphi(x, t)$ è soluzione dell'equazione delle onde.

Verifichiamo infine i dati iniziali:

$$W_\varphi(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t M_\varphi(x, ct) = 0,$$

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial t}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[M_\varphi(x, ct) + \frac{1}{4\pi c t} \int_{B_{ct}(x)} dy \Delta \varphi(y) \right] = \varphi(x).$$

(l'integrale a destra è di ordine t^3 per $t \rightarrow 0^+$). $\square$

LEMMA 8.7. Se $W_\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ allora $v(x, t) = \frac{\partial W_\varphi}{\partial t}(x, t)$ è l'unica soluzione in $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \Delta v & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ v(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Derivando ambo i membri dell'equazione per W_φ rispetto al tempo, dal Lemma 8.6 segue che $v(x, t)$ soddisfa l'equazione delle onde. Ovviamente, $v(x, 0) = \varphi(x)$. Infine, essendo per ipotesi W_φ due volte derivabile con continuità fino alla frontiera,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 W_\varphi}{\partial t^2}(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} c^2 \Delta W_\varphi(x, t) = c^2 \Delta W_\varphi(x, 0) = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $W_\varphi(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. $\square$

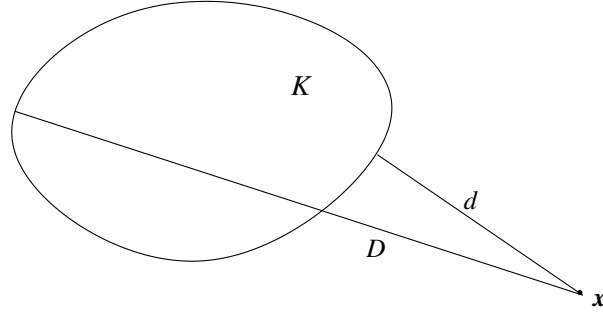


FIGURA 8.3. Distanze minima e massima del punto x dall'insieme compatto K .

La dimostrazione della formula di Kirchhoff è ora immediata. Infatti se $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ allora $W_h \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ e $W_g \in C^3(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$. Possiamo allora applicare i lemmi precedenti. Per il principio di sovrapposizione, la soluzione del problema (8.10) è quindi

$$u(x, t) = \frac{\partial W_g}{\partial t}(x, t) + W_h(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} [tM_g(x, ct)] + tM_h(x, ct),$$

che è la formula di Kirchhoff. $\square$

Una scrittura equivalente della formula di Kirchhoff è la seguente. Notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) g(x + ctn) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) g(x + ctn) + \frac{ct}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \nabla g(x + ctn) \cdot n \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) + \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) \nabla g(y) \cdot (y - x), \end{aligned}$$

cosicch 

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) [g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x) + th(y)].$$

Concludiamo con tre osservazioni:

- 1) Poich  appare ∇g , la soluzione pu  essere meno regolare dei dati iniziali.
- 2) La formula di Kirchhoff ha senso anche se $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e h   limitata, quindi si presta a fornire una soluzione generalizzata dell'equazione delle onde.
- 3) Sussiste il *Principio di Huygens*: La soluzione nel punto (x, t) dipende solo dai valori di g e h sulla superficie sferica $S_{ct}(x)$. In particolare, se g e h hanno supporto in un compatto K di $\mathbb{R}^3$, allora $u(x, t)$   diversa da zero solo per $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ con

$$t_{\min} = \frac{d}{c}, \quad t_{\max} = \frac{D}{c}, \quad d = \min_{y \in K} |y - x|, \quad D = \max_{y \in K} |y - x|.$$

(vedi Figura 8.3). Se definiamo il *fronte d'onda* (anteriore) al tempo t come la superficie che separa i punti che già oscillano da quelli che non oscillano ancora, questa è l'involuppo esterno dell'unione delle superfici sferiche di centro in K e raggio ct . Si può definire anche un fronte d'onda posteriore. I fronti si muovono con velocità c . Il tempo $t_{\min}$ è il passaggio del fronte d'onda anteriore per il punto x , il tempo $t_{\max}$ quello del passaggio del fronte posteriore. Dopo $t_{\max}$ il punto x torna in quiete a $u = 0$. Ricordiamo che in dimensione $d = 1$, se $h \neq 0$, per $t > t_{\max}$ la soluzione in x torna in quiete ma con $u \neq 0$. Vedremo che in dimensione $d = 2$ il principio di Huygens non vale.

ESERCIZIO 8.1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = |x|^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.2. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x_1^2 - x_2^2 & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.3. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = e^{-|x|^2} & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.4. Dimostrare che se i dati iniziali hanno simmetria radiale, ovvero $g(x) = \tilde{g}(|x|)$ e $h(x) = \tilde{h}(|x|)$, allora anche la soluzione $u(x, t)$ definita dalla formula di Kirchhoff ha simmetria radiale.

ESERCIZIO 8.5. Dimostrare che se i dati iniziali hanno simmetria radiale, ovvero $g(x) = \tilde{g}(|x|)$ e $h(x) = \tilde{h}(|x|)$, allora anche la soluzione $u(x, t)$ dell'equazione delle onde generalizzata omogenea in dimensione $d = 2, 3$ ha simmetria radiale.

ESERCIZIO 8.6. In base all'Esercizio 8.4, la soluzione di dati iniziali a simmetria radiale ha la forma $u(x, t) = \tilde{u}(|x|, t)$. Determinare $\tilde{u}(r, t)$ in termini della soluzione di un opportuno problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde in dimensione $d = 1$.

ESERCIZIO 8.7. Ricalcolare le soluzioni degli Esercizi 8.1 e 8.3 utilizzando la strategia dedotta nell'Esercizio 8.6.

8.5. Formula di Poisson

Dalla formula di Kirchhoff segue anche la formula risolutiva di Poisson per l'equazione delle onde in dimensione $d = 2$.

TEOREMA 8.8. *Siano $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Allora l'unica soluzione in $C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (8.12)$$

è data dalla formula di Poisson,

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{h(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}}.$$

Prima di dimostrarlo premettiamo un lemma.

LEMMA 8.9. *Sia $\tilde{\varphi} \in C(\mathbb{R}^3)$ tale che $\tilde{\varphi}(x, x_3) = \varphi(x)$, dove $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$. Allora anche la media $M_{\tilde{\varphi}}$ non dipende da x_3 , precisamente*

$$M_{\tilde{\varphi}}(x, x_3, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(x)} dy \frac{\varphi(y)}{\sqrt{r^2 - |x - y|^2}},$$

(dove $B_r(x)$ è il disco di $\mathbb{R}^2$).

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\varphi}}(x, x_3, r) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \varphi(x_1 + r n_1, x_2 + r n_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_1(0)^+} d\sigma(n) \varphi(x_1 + r n_1, x_2 + r n_2) \end{aligned}$$

dove $S_1(0)^+ = \{(n_1, n_2, n_3) \in S_1(0) : n_3 \geq 0\}$ è la calotta sferica superiore. Ma su tale superficie $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$ e pertanto l'elemento di area è

$$d\sigma(n) = \frac{dn_1 dn_2}{\sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}},$$

per cui

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\varphi}}(x, x_3, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} dn_1 dn_2 \frac{\varphi(x_1 + r n_1, x_2 + r n_2)}{\sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(x)} dy \frac{\varphi(y)}{\sqrt{r^2 - |x - y|^2}}. \end{aligned}$$

□

Possiamo ora dimostrare la formula di Poisson. Definite $\tilde{g}(x, x_3) = g(x)$ e $\tilde{h}(x, x_3) = h(x)$, indichiamo con $\tilde{u}(x, x_3, t)$ la soluzione del problema (8.10) di dati iniziali $\tilde{g}$, $\tilde{h}$. Dal lemma precedente e dalla formula di Kirchhoff segue che $\tilde{u}(x, x_3, t)$ non dipende dalla variabile x_3 e pertanto, come funzione delle variabili $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, è soluzione del problema (8.12). Inoltre, usando l'espressione per le medie trovata nel lemma, vediamo che la formula di Kirchhoff si riduce in questo caso alla formula di Poisson. □

Anche ora abbiamo una scrittura equivalente per la soluzione. Notiamo a tal fine che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} \right] &= \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ct \int_{B_1(0)} dn \frac{g(x+ctn)}{\sqrt{1-n^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} dn \frac{g(x+ctn)}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{ct}{2\pi} \int_{B_1(0)} dn \frac{\nabla g(x+ctn) \cdot n}{\sqrt{1-n^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}}. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione del problema (8.12) si scrive,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}}.$$

Come nel caso della formula di Kirchhoff la formula di Poisson mostra che la soluzione può essere meno regolare dei dati iniziali; inoltre tale formula si presta ad essere interpretata come soluzione generalizzata se $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ed h è limitata.

Per quanto riguarda la dipendenza dai dati iniziali, vediamo che ora la soluzione in un punto (x, t) dipende dai valori dei dati iniziali in tutta la palla piena $B_{ct}(x)$. In particolare *non vale il Principio di Huygens in $d = 2$* : se g, h hanno supporto in un compatto K di $\mathbb{R}^2$, definiti $t_{\min}, t_{\max}$ come nella sezione precedente, la soluzione $u(x, t)$ inizia ad oscillare per $t > t_{\min}$ e continua in generale a variare nel tempo, anche per $t > t_{\max}$. In particolare, se $t > t_{\max}$ il compatto K è contenuto nel dominio di integrazione $B_{ct}(x)$, cosicché

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_K dy \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} \quad \forall t > t_{\max}.$$

Solo per $t \rightarrow \infty$ si ha $u(x, t) \rightarrow 0$. Questo è il motivo per il quale, ad esempio, mentre si possono inviare segnali luminosi istantanei nello spazio (cioè con un inizio e fine segnale), se invece si tira una sasso in uno stagno, un tappo di sughero, dopo essere stato raggiunto dal fronte d'onda, inizia ad oscillare sul pelo d'acqua senza tornare al riposo in un tempo finito (in verità questo poi succede a causa di fenomeni dissipativi non descritti dall'equazione delle onde).

8.6. Potenziali ritardati

Utilizzando il metodo di Duhamel si può dimostrare che le soluzioni del problema di Cauchy globale per l'equazione d'onda con dati iniziali omogenei e forzante $f = f(x, t)$ regolare,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

sono, rispettivamente,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{c}\right)}{|x-y|} \quad \text{se } d = 3,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t ds \int_{B_{c(t-s)}(x)} dy \frac{f(y, s)}{\sqrt{c^2(t-s)^2 - |x-y|^2}} \quad \text{se } d = 2.$$

Limitiamoci all'analisi del caso $d = 3$. In base al metodo di Duhamel, scriviamo la soluzione cercata nella forma

$$U_3(x, t) = \int_0^t ds w(x, t, s),$$

con $w(x, t, s)$ soluzione della propagazione libera di un impulso pari a $f(x, s)$ al tempo $s < t$: $w(x, t, s) = \frac{t-s}{4\pi(c(t-s))^2} \int_{S_{c(t-s)}(x)} d\sigma(y) f(y, s)$. Dunque

$$\begin{aligned} U_3(x, t) &= \int_0^t ds \frac{t-s}{4\pi(c(t-s))^2} \int_{S_{c(t-s)}(x)} d\sigma(y) f(y, s) \\ &= \int_0^{ct} dr \frac{1}{4\pi c^2 r} \int_{S_r(x)} d\sigma(y) f\left(y, t - \frac{r}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} dr \int_{S_r(x)} d\sigma(y) \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{c}\right)}{|x-y|} = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{f\left(y, t - \frac{|x-y|}{c}\right)}{|x-y|}. \end{aligned}$$

La soluzione $U_3(t)$ viene anche detta *potenziale ritardato*, in quanto la soluzione nel punto x al tempo t è individuata dai valori della forzante (o sorgente) $f(y, s)$ per $y \in B_{ct}(x)$ valutati agli istanti precedenti $s = t - \frac{|x-y|}{c}$. Inoltre, il tempo di ritardo $\frac{|x-y|}{c}$ è quello necessario al segnale uscente da y per raggiungere x . In particolare $U_3(x, t)$ dipende unicamente dai valori di $f(y, s)$ sulla frontiera laterale del cono di influenza retrogrado

$$\partial C_{x,t} = \{(y, s) : |y-x| = c(t-s), \quad t \in [0, t]\} = \bigcup_{s \in [0, t]} S_{c(t-s)}(x) \times \{t\}.$$

Si osservi che nei casi $d = 1, 2$ la soluzione $U_d(x, t)$ dipende invece dai valori di $f(y, s)$ in tutto il cono $C_{x,t}$.

8.7. Sulla velocità di propagazione

Consideriamo l'equazione d'onda generalizzata su $\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u,$$

e cerchiamo soluzioni della forma $U(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, ovvero onde viaggianti armoniche. Sostituendo nell'equazione si verifica immediatamente che $U(x, t)$ è soluzione se e solo se i parametri k, ω soddisfano la relazione

$$\omega = \omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + \gamma},$$

detta *relazione di dispersione* per l'equazione in esame. Nel caso dell'equazione d'onda pura ($\gamma = 0$) tale relazione è lineare ($\omega = ck$) ma se $\gamma > 0$ questo non è il caso e si ha

$$U(x, t) = A \cos[k(x - c_k t)], \quad c_k = \frac{\sqrt{c^2 k^2 + \gamma}}{k}.$$

Quindi ogni onda armonica viaggia con una propria velocità c_k (dipendente dal numero d'onda k) e tale velocità è in modulo strettamente maggiore del parametro c che appare nell'equazione. Quest'ultimo fatto comporta un'apparente contraddizione con i risultati della Sezione 8.1, in base ai quali il parametro c è una stima dall'alto della velocità di propagazione dei segnali. In verità non vi è alcuna contraddizione, poiché quei risultati si applicano a dati iniziali localizzati in regioni finite dello spazio, mentre il profilo $U(x, 0) = \cos(kx)$ è distribuito in modo periodico su tutto l'asse $\mathbb{R}$.

Per meglio comprendere questo fatto è utile analizzare la propagazione di un segnale localizzato, quando questo sia espresso nella forma di un “pacchetto d'onda”. Più precisamente, supponiamo che il dato iniziale abbia la forma seguente,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) = \int dk A(k) \cos(kx), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) = \int dk \omega(k) A(k) \sin(kx), \end{aligned} \tag{8.13}$$

con $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ reale. Osservando che la funzione $\omega(k)$ è C^∞ con crescita al più lineare e derivate limitate, si deduce che entrambe le funzioni g, h appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pertanto, sebbene non a supporto compatto, interpretiamo g, h come dati iniziali localizzati, in virtù del loro rapido decadimento all'infinito. Si osservi che stiamo assumendo, per brevità, che la funzione g sia pari. Nel caso più generale avremmo richiesto che

$$g(x) = \int dk A(k) \cos(kx) + \int dk B(k) \sin(kx),$$

ovvero, ricordando la teoria della trasformata di Fourier discussa nel Capitolo 6, $g = \mathcal{R}\mathcal{F}^{-1}(A + iB)$.

Dalla (8.13), per il principio di sovrapposizione la soluzione si scrive

$$u(x, t) = \int dk A(k) \cos[kx - \omega(k)t]. \tag{8.14}$$

Infatti, per le ipotesi sulla funzione $A(k)$, il membro di destra può essere derivato sotto il segno di integrale un numero arbitrario di volte rispetto alle variabili x, t , da cui si verifica in particolare che soddisfa l'equazione ed i dati iniziali. Da questa espressione si comprende il motivo del nome “relazione di dispersione” per $\omega(k)$. Infatti, se tale relazione non è lineare, la velocità di ciascuna armonica è diversa ed il pacchetto si “disperde” durante la sua evoluzione: al tempo $t > 0$ la soluzione $u(x, t)$ non è una semplice traslazione del profilo iniziale $g(x)$.

D'altra parte, se la funzione $A(k)$ è molto piccata intorno ad un valore k_0 , solo le armoniche vicine a k_0 contribuiscono in modo significativo all'integrale, cosicché per tempi non troppo lunghi il pacchetto viene deformato poco e la sua evoluzione consiste principalmente in una traslazione. Vogliamo allora verificare che tale traslazione avviene con una velocità *inferiore a c* , dunque compatibile con la stima sulla velocità di propagazione. Per fissare le idee, scegliamo il pacchetto d'onda con

$$A(k) = A_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon > 0.$$

Dunque, con la sostituzione $k = k_0 + \sqrt{\varepsilon}q$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int dk \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{\varepsilon}\right] \cos(kx) = \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos(k_0x + \sqrt{\varepsilon}qx) \\ &= \cos(k_0x) \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos(\sqrt{\varepsilon}qx) - \sin(k_0x) \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \sin(\sqrt{\varepsilon}qx) \\ &= \cos(k_0x) \exp\left[-\frac{1}{4}\varepsilon x^2\right], \end{aligned}$$

avendo applicato la (6.2) (con $a = 1$, $x = q$ e $\xi = \sqrt{\varepsilon}x$) nell'ultimo passaggio.

Vogliamo ora studiare l'evoluzione quando ε è piccolo. Infatti, per $\varepsilon \rightarrow 0$ la funzione $A_\varepsilon(k)$ tende alla delta di Dirac centrata in k_0 , mentre $g(x)$ si delocalizza e tende all'armonica pura $\cos(k_0x)$. Sostituendo in (8.14), sviluppando nel parametro piccolo $\sqrt{\varepsilon}$ e ragionando analogamente a sopra si ha,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int dk \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{\varepsilon}\right] \cos(kx - \omega(k)t) \\ &= \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos[(k_0 + \sqrt{\varepsilon}q)x - \omega(k_0 + \sqrt{\varepsilon}q)t] \\ &= \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \{\cos[k_0x - \omega(k_0)t + (x - \omega'(k_0)t)\sqrt{\varepsilon}q] + O(\varepsilon q^2)\} \\ &= \cos[k_0x - \omega(k_0)t] \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos[(x - \omega'(k_0)t)\sqrt{\varepsilon}q] + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

dove $O(\varepsilon) = \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} O(\varepsilon q^2)$. Pertanto, utilizzando nuovamente la (6.2) (con $a = 1$, $x = q$ e $\xi = \sqrt{\varepsilon}(x - \omega'(k_0)t)$)

$$u(x, t) = \cos[k_0x - \omega(k_0)t] \exp\left[-\frac{1}{4}\varepsilon(x - \omega'(k_0)t)^2\right] + O(\varepsilon).$$

Nell'evoluzione del pacchetto distinguiamo quindi due differenti grandezze cinematiche: la *velocità di fase* $c_{k_0} = \omega(k_0)/k_0$ e la *velocità di gruppo* $c_g = \omega'(k_0)$. La prima è la velocità con la quale si muovono, ad esempio, le creste delle oscillazioni all'interno del pacchetto. La seconda invece è la velocità con cui trasla il

pacchetto nel suo insieme. Come preannunciato,

$$\omega'(k_0) = \frac{c^2 k_0}{\sqrt{c^2 k_0^2 + \gamma}} \leq c$$

(dove l'uguaglianza sussiste solo nel caso dell'equazione pura, quando $\gamma = 0$).

8.8. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 8.1. Applichiamo la formula di Kirchhoff che, essendo $h = 0$, si riduce a

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi(c t)^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) \right]$$

Sostituendo i dati del problema ($c = \sqrt{2}$, $g(x) = |x|^2$),

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi(\sqrt{2}t)^2} \int_{S_{\sqrt{2}t}(x)} d\sigma(y) |y|^2 \right].$$

Per calcolare l'integrale, scriviamo

$$|y|^2 = |x + y - x|^2 = |x|^2 + |y - x|^2 + 2x \cdot (y - x),$$

cosicché

$$\frac{t}{4\pi(\sqrt{2}t)^2} \int_{S_{\sqrt{2}t}(x)} d\sigma(y) |y|^2 = t(|x|^2 + (\sqrt{2}t)^2) = t|x|^2 + 2t^3,$$

avendo usato che, per ragioni di antisimmetria,

$$\int_{S_{\sqrt{2}t}(x)} d\sigma(y) 2x \cdot (y - x) = 2(\sqrt{2}t)^3 \int_{S_1(0)} d\sigma(n) x \cdot n = 0.$$

Dunque

$$u(x, t) = |x|^2 + 6t^2.$$

SOLUZIONE ES. 8.2. Applichiamo la formula di Kirchhoff con $g(x) = 0$ e $h(x) = x_1^2 - x_2^2$, quindi eseguiamo la sostituzione $y = x + 2tn$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{t}{4\pi(2t)^2} \int_{S_{2t}(x)} d\sigma(y) (y_1^2 - y_2^2) = t(x_1^2 - x_2^2) \\ &+ \frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) 4t(x_1 n_1 - x_2 n_2) + \frac{t}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) 4t^2(n_1^2 - n_2^2). \end{aligned}$$

Ma per ragioni di disparità e simmetria,

$$\begin{aligned} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) x_1 n_1 &= \int_{S_1(0)} d\sigma(n) x_2 n_2 = 0, \\ \int_{S_1(0)} d\sigma(n) n_1^2 &= \int_{S_1(0)} d\sigma(n) n_2^2. \end{aligned}$$

Quindi

$$u(x, t) = t(x_1^2 - x_2^2).$$

SOLUZIONE ES. 8.4. La soluzione si scrive in termini della media $M_\phi(x, r)$ valutata per $\phi = g, h$ e con $r = ct$. Osserviamo ora che se $\phi(x) = \tilde{\phi}(|x|)$ allora

$$\begin{aligned} M_\phi(x, r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} d\sigma(y) \tilde{\phi}(|y|) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \tilde{\phi}(|x + rn|) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \tilde{\phi}(\sqrt{|x|^2 + r^2 + 2r \cdot n}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \tilde{\phi}(\sqrt{|x|^2 + r^2 + 2r|x|\cos\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta \tilde{\phi}(\sqrt{|x|^2 + r^2 + 2r|x|\eta}), \end{aligned}$$

avendo eseguito l'integrazione nella variabile n mediante coordinate sferiche con asse verticale diretto come x . Dunque $M_\phi(x, r)$ dipende da x per il solo tramite di $|x|$.

SOLUZIONE ES. 8.5. Dobbiamo dimostrare che la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u - \gamma u & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \tilde{g}(|x|), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \tilde{h}(|x|) & \text{per } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

ha la forma $u(x, t) = \tilde{u}(|x|, t)$ per qualche $\tilde{u}(r, t)$, $r \geq 0$. A tal scopo mostriamo che le rotazioni sono una simmetria per l'equazione, dopodiché il risultato segue per l'unicità della soluzione. Tale proprietà di simmetria segue dal fatto che, più in generale, l'operatore di Laplace commuta con il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^d$. Questo significa che se definiamo, per ogni funzione f su $\mathbb{R}^d$, vettore $a \in \mathbb{R}^d$ e matrice ortogonale R , $f_{a,R}(x) = f(a + Rx)$, allora

$$\Delta f_{a,R}(x) = (\Delta f)_{a,R}(x).$$

In effetti,

$$\begin{aligned} (D^2 f_{a,R})_{i,j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a + Rx) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k R_{k,j} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + Rx) \\ &= \sum_{k,h} R_{k,j} R_{h,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}(a + Rx) = (R^T D^2 f(a + Rx) R)_{i,j} \end{aligned}$$

da cui, usando la ciclicità della traccia e che $RR^T = \mathbf{I}$,

$$\begin{aligned} \Delta f_{a,R}(x) &= \text{Tr}[D^2 f_{a,R}(x)] = \text{Tr}[R^T D^2 f(a + Rx) R] \\ &= \text{Tr}[D^2 f(a + Rx)] = \Delta f(a + Rx) = (\Delta f)_{a,R}(x). \end{aligned}$$

In particolare, posto $u_R(x, t) = u_{0,R}(x, t)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(Rx, t) = c^2 (\Delta u)_R(x, t) - \gamma u_R(x, t) \\ &= c^2 \Delta u_R(x, t) - \gamma u_R(x, t), \end{aligned}$$

con $u_R(x, 0) = \tilde{g}(|Rx|) = \tilde{g}(|x|)$ e $\frac{\partial u_R}{\partial t}(x, 0) = \tilde{h}(|Rx|) = \tilde{h}(|x|)$. Pertanto $u(x, t)$ e $u_R(x, t)$, essendo soluzioni del medesimo problema di Cauchy, coincidono per unicità. Dunque $u(x, t) = u_R(x, t) = u(Rx, t)$ per ogni rotazione R , ovvero $u(x, t) = \tilde{u}(|x|, t)$.

SOLUZIONE ES. 8.6. Sappiamo che la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \tilde{g}(|x|), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \tilde{h}(|x|) & \text{per } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ha la forma $u(x, t) = \tilde{u}(|x|, t)$. Dobbiamo caratterizzare $\tilde{u}(r, t)$ in termini della soluzione di un opportuno problema in dimensione $d = 1$.

In generale, se $\phi(x) = \psi(|x|)$ allora

$$\begin{aligned} \Delta \phi(x) &= \operatorname{div} \nabla \psi(|x|) = \operatorname{div} \left[\psi'(|x|) \frac{x}{|x|} \right] = \left[\nabla \frac{\psi'(|x|)}{|x|} \right] \cdot x + \frac{\psi'(|x|)}{|x|} \operatorname{div} x \\ &= \left[\psi''(|x|) \frac{x}{|x|^2} - \psi'(|x|) \frac{x}{|x|^3} \right] \cdot x + \frac{3}{|x|} \psi'(|x|) \\ &= \psi''(|x|) + \frac{2}{|x|} \psi'(|x|) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \psi(r)) \Big|_{r=|x|}. \end{aligned}$$

Quindi $\tilde{u}(r, t)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2 (r \tilde{u})}{\partial r^2},$$

ovvero la funzione $v(r, t) = r \tilde{u}(r, t)$ soddisfa il problema di Cauchy-Dirichlet sulla semiretta

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R}_+, \\ v(r, 0) = r \tilde{g}(r), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = r \tilde{h}(r) & \text{per } r \geq 0, \\ v(0, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases}$$

che possiamo risolvere con il metodo delle riflessioni, prolungando la soluzione (e quindi i dati iniziali) per disparità a valori $r \leq 0$. Determinata $v(r, t)$ rimane da verificare che $\tilde{u}(r, t) = v(r, t)/r$ è ben definita in $r = 0$.

SOLUZIONE ES. 8.7. Limitiamoci alla soluzione dell'Esercizio 8.3. Il problema ausiliario è

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R}_+, \\ v(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = r e^{-r^2} & \text{per } r \geq 0, \\ v(0, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases}$$

L'estensione per disparità consiste semplicemente nel considerare il problema di Cauchy globale in cui $v(r, 0) = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial t}(r, 0) = r e^{-r^2}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$. Per la formula di D'Alembert,

$$v(r, t) = \frac{1}{4} \int_{r-2t}^{r+2t} dz z e^{-z^2} = \frac{e^{-(r+2t)^2} - e^{-(r-2t)^2}}{8} = \frac{1}{4} e^{-r^2-4t^2} \sinh(4rt)$$

e dunque $u(x, t) = \tilde{u}(|x|, t) = |x|^{-1} v(|x|, t) = \frac{1}{4|x|} e^{-|x|^2-4t^2} \sinh(4|x|t)$.

Equazioni di Laplace e Poisson

9.1. Considerazioni generali

Affrontiamo qui lo studio dell'*equazione di Laplace* $\Delta u = 0$ e della sua versione non omogenea, l'*equazione di Poisson* $\Delta u + f = 0$, dove $u = u(x)$ è la funzione incognita, $x \in \mathbb{R}^d$ ed $f = f(x)$ è una funzione assegnata. Le soluzioni di tali equazioni descrivono, ad esempio, le posizioni di equilibrio di una membrana ($d = 2$) o di un solido elastico ($d = 3$) sottoposti alla forzante f , oppure il campo di temperatura di un corpo in equilibrio termico in presenza della sorgente di calore f . Ma tali equazioni emergono in svariati altri contesti della Fisica. Un esempio fondamentale è fornito dal potenziale newtoniano/coulombiano u generato da una distribuzione di massa/carica ρ che, come vedremo più avanti, soddisfa l'equazione di Poisson $\Delta u + 4\pi\rho = 0$.

Come già visto per l'equazione d'onda, e come suggerito dalle varie interpretazioni fisiche possibili delle soluzioni dell'equazione, siamo condotti a formulare il problema in domini $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e per la buona posizione del problema occorre aggiungere delle condizioni al bordo (o condizioni limite). In particolare, consideriamo il problema di Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.1)$$

ed il problema di Neumann,

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = b(x) & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.2)$$

dove $g(x)$, $b(x)$ sono funzioni assegnate e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ è la derivata normale di u sulla frontiera come definita in (8.3), avendo indicato con $\nu(x)$ la normale alla frontiera $\partial\Omega$ nel punto $x \in \partial\Omega$, diretta verso l'esterno di Ω . Qualora $\Omega = \mathbb{R}^d$, o più in generale Ω sia un dominio illimitato di $\mathbb{R}^d$, occorrerà specificare anche il comportamento della soluzione per $|x| \rightarrow \infty$, ad esempio $u(x) \rightarrow C$ quando $|x| \rightarrow \infty$ per qualche costante C assegnata.

Studieremo qui solo il problema di Dirichlet (9.1), il problema di Neumann

presenta maggiori difficoltà. È sufficiente considerare separatamente il problema omogeneo con condizioni al bordo non omogenee,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.3)$$

ed il problema non omogeneo con condizioni al bordo omogenee,

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.4)$$

poiché allora $u = u_1 + u_2$, con u_1 soluzione di (9.3) ed u_2 soluzione di (9.4), è soluzione di (9.1).

Una *soluzione classica* del problema (9.1) è una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che verifica l'equazione in Ω e soddisfa le condizioni al bordo su $\partial\Omega$.

DEFINIZIONE 9.1. Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ è detta *armonica nel dominio Ω* se ivi soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$.

Dunque risolvere (9.3) equivale a determinare una funzione armonica nel dominio Ω , che sia continua fino alla frontiera ed ivi assuma il prefissato valore $g(x)$.

9.2. Analisi del problema unidimensionale

Nel caso unidimensionale, senza perdere di generalità, possiamo assumere $\Omega = (0, L)$, $L > 0$, cosicché i problemi (9.3) e (9.4) si scrivono in questo caso,

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{in } (0, L), \\ u(0) = a_1, \quad u(L) = a_2, \end{cases} \quad (9.5)$$

$$\begin{cases} u'' + f = 0 & \text{in } (0, L), \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Il problema (9.5) ha banalmente soluzione $u(x) = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{L}x$. Per il problema (9.6) osserviamo che l'equazione $u'' + f = 0$ ha integrale generale

$$u(x) = C_1 + C_2 x + \int_0^x dy (y - x) f(y).$$

Possiamo ora determinare le costanti C_1, C_2 imponendo le condizioni al bordo $u(x) = u(L) = 0$. Si trova immediatamente che

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{L} \int_0^L dy (L - y) f(y).$$

Pertanto la soluzione del problema (9.6) è

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{x}{L} \int_0^L dy (L-y) f(y) + \int_0^x dy (y-x) f(y) \\
 &= \int_0^x dy \left[\frac{x(L-y)}{L} + (y-x) \right] f(y) + \int_x^L dy \frac{x(L-y)}{L} f(y) \\
 &= \int_0^x dy \frac{(L-x)y}{L} f(y) + \int_x^L dy \frac{x(L-y)}{L} f(y) \\
 &= \int_0^L dy G(x, y) f(y),
 \end{aligned}$$

avendo definito la *funzione di Green* del problema,

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{x(L-y)}{L} & \text{se } x < y, \\ \frac{(L-x)y}{L} & \text{se } x > y. \end{cases}$$

Vogliamo ora mostrare che la funzione di Green può essere interpretata essa stessa come soluzione di un'equazione di Poisson, precisamente nel caso in cui la forzante f è rimpiazzata dalla distribuzione δ di Dirac concentrata in y . Osserviamo che le seguenti proprietà di G seguono immediatamente dalla sua definizione,

- $G \in C([0, L] \times [0, L])$, definendo $G(x, x) = (L-x)x/L$ sulla diagonale (G è continua su tutto il quadrato $[0, L] \times [0, L]$);
- $G(x, y) = G(y, x)$ per ogni $x, y \in [0, L]$, (G è simmetrica);
- $G(0, y) = G(L, y) = 0$ per ogni $y \in [0, L]$ (G soddisfa le condizioni al bordo omogenee);
- $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = 0$ per ogni $x \neq y$ (G è armonica fuori la diagonale);
- $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = -1$ (la derivata $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$ ha un salto quando attraversa la diagonale).

PROPOSIZIONE 9.2. *La funzione di Green $x \mapsto G(x, y)$ è la soluzione fondamentale del problema di Poisson in $\mathcal{D}'(0, L)$,*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) + \delta_y(x) = 0 & x, y \in (0, L), \\ G(0, y) = G(L, y) = 0 & y \in (0, L), \end{cases}$$

ovvero

$$\int dx G(x, y) \psi''(x) = -\psi(y) \quad \forall y \in (0, L) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, L),$$

con

$$\mathcal{D}(0, L) = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \text{supp}(\psi) \subset (0, L)\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Come funzione ordinaria la derivata seconda $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y)$ è nulla su tutto l'intervallo $[0, L]$ ad esclusione del punto $x = y$. D'altra parte, per $x \neq y$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \frac{L-y}{L} - \mathcal{H}(x-y),$$

con $\mathcal{H}$ la funzione di Heavyside, cosicché

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = -\mathcal{H}'(x-y) = -\delta_y(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, L),$$

poiché $\mathcal{H}'(x-y) = \delta_y$ in $\mathcal{D}'(0, L)$ se $y \in (0, L)$.

Alternativamente, partendo direttamente dalla definizione di $G(x, y)$ e integrando per parti, per ogni $\psi \in \mathcal{D}(0, L)$,

$$\begin{aligned} \int dx G(x, y) \psi''(x) &= \int_0^y dx \frac{x(L-y)}{L} \psi''(x) + \int_y^L dx \frac{(L-x)y}{L} \psi''(x) \\ &= \left[\frac{x(L-y)}{L} \psi'(x) \right]_{x=0}^{x=y} - \frac{L-y}{L} \int_0^y dx \psi'(x) \\ &\quad + \left[\frac{(L-x)y}{L} \psi'(x) \right]_{x=y}^{x=L} + \frac{y}{L} \int_y^L dx \psi'(x) \\ &= \frac{y(L-y)}{L} \psi'(y) - \frac{L-y}{L} \psi(y) - \frac{y(L-y)}{L} \psi'(y) - \frac{y}{L} \psi(y) \\ &= -\psi(y), \end{aligned}$$

da cui la tesi □

OSSERVAZIONE 9.1. Si può derivare il risultato della proposizione in modo più astratto, senza ricorrere all'espressione esplicita della funzione di Green. Osserviamo infatti che se $u(x)$ è soluzione di $u'' + f = 0$ con $u(0) = u(L) = 0$, allora

$$\int_0^L dx [u''(x) + f(x)] \psi(x) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, L),$$

da cui, integrando per parti,

$$\int_0^L dx u(x) \psi''(x) + f(x) \psi(x) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, L).$$

Se ora cerchiamo la soluzione nella forma $u(x) = \int_0^L dy G(x, y) f(y)$, allora

$$\int_0^L dx \left[\int_0^L dy G(x, y) f(y) \psi''(x) + f(x) \psi(x) \right] = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, L),$$

ovvero

$$\int_0^L dy f(y) \left[\int_0^L dx G(x, y) \psi''(x) + \psi(y) \right] = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, L).$$

Perché la precedente identità sia verificata per qualsiasi forzante f , l'espressione tra parentesi quadre, che è una funzione continua di y , deve annullarsi

identicamente, dunque

$$\int_0^L dx G(x, y) \psi''(x) + \psi(y) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, L) \quad \forall y \in [0, L],$$

ovvero $G(x, y)$ deve soddisfare

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) + \delta_y(x) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, L).$$

Inoltre, sempre per l'arbitrarietà di f , la condizione $u(0) = u(L) = 0$ implica che deve aversi anche $G(0, y) = G(L, y) = 0$ per ogni $y \in [0, L]$. In conclusione: se esiste un nucleo risolvete $G(x, y)$ allora esso deve necessariamente risolvere il problema generalizzato.

ESERCIZIO 9.1. Risolvere il problema sulla semiretta,

$$\begin{cases} u'' + f = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+, \\ u(0) = 0, \quad \sup_{x \geq 0} |u(x)| < \infty, \end{cases}$$

assumendo che $f \in C([0, +\infty))$ sia tale che $\int_0^\infty dy y |f(y)| < \infty$. Dimostrare inoltre che esiste il limite della soluzione $u(x)$ per $x \rightarrow \infty$ e calcolarlo.

9.3. Approccio al problema in dimensione maggiore di uno

In dimensione $d > 1$ la soluzione del problema di Laplace-Dirichlet (9.3) non è immediata come in dimensione $d = 1$ e sarà oggetto di studio. Anticipiamo però che la soluzione di questo problema permette di risolvere anche il problema di Poisson-Dirichlet (9.4) in domini limitati. Infatti, ragionando come nel caso unidimensionale, questo problema si riduce a determinare la funzione di Green sul dominio Ω con condizioni omogenee, ovvero la funzione $G(x, y)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) + \delta_y(x) = 0 & x, y \in \Omega, \\ G(x, y) = 0 & x \in \partial\Omega, y \in \Omega, \end{cases} \quad (9.7)$$

nel senso che poi la soluzione di (9.4) si scriverà nella forma

$$u(x) = \int_\Omega dy G(x, y) f(y).$$

Nella prossima sezione calcoleremo esplicitamente la funzione di Green dell'equazione di Poisson su tutto lo spazio $\mathbb{R}^d$, ovvero una particolare soluzione $G_d(x, y)$ dell'equazione

$$\Delta_x G_d(x, y) + \delta_y(x) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Se cerchiamo ora la funzione di Green soluzione di (9.7) nella forma $G(x, y) = G_d(x, y) + \gamma(x, y)$, allora la funzione incognita $\gamma(x, y)$ è soluzione del problema di Laplace-Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta_x \gamma(x, y) = 0 & \text{per } x, y \in \Omega, \\ \gamma(x, y) = -G_d(x, y) & \text{per } x \in \partial\Omega, y \in \Omega, \end{cases}$$

ovvero ci siamo ricondotti ad un problema del tipo (9.3). In Sezione 9.9 tale strategia verrà discussa più in dettaglio.

ESERCIZIO 9.2. Utilizzando il risultato dell'Esercizio 5.7, applicare la strategia sopra descritta per calcolare la funzione di Green del problema di Poisson sul segmento $(0, L)$.

9.4. Soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace in $d = 2, 3$

Una distribuzione $\Phi(x)$ è detta *soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace* se è soluzione del problema

$$\Delta\Phi(x) + \delta(x) = 0.$$

Questo significa che $\Phi(x)$ è una funzione armonica in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tale che

$$\int dx \Delta\varphi(x)\Phi(x) = -\psi(0) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

Osserviamo che Φ non è unica, poiché se u è una funzione armonica allora anche $\Phi + u$ è soluzione fondamentale. Per calcolarla utilizziamo il metodo della trasformata di Fourier.

LEMMA 9.3. *Affinché la distribuzione temperata $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sia soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace è necessario e sufficiente che la sua trasformata di Fourier $\hat{\Phi}$ sia soluzione dell'equazione*

$$|\xi|^2 \hat{\Phi}(\xi) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Ovvio, essendo $\mathcal{F}(\Delta\Phi) = -|\xi|^2 \mathcal{F}(\Phi)$ e $\mathcal{F}(\delta) = 1$. $\square$

Caso $d = 3$. Poiché la funzione $|\xi|^{-2}$ è localmente integrabile in $\mathbb{R}^3$, una soluzione dell'equazione $|\xi|^2 \hat{\Phi}(\xi) = 1$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ è fornito dalla distribuzione temperata

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Calcoliamo la trasformata inversa $\Phi = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\Phi})$, che è caratterizzata dall'equazione

$$\langle \hat{\Phi}, \psi \rangle = \langle \Phi, \hat{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Phi}, \psi \rangle &= \int d\xi \frac{\psi(\xi)}{|\xi|^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{\psi(\xi)}{|\xi|^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{1}{|\xi|^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx \hat{\psi}(x) e^{i\xi \cdot x} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx \hat{\psi}(x) \int_{|\xi| \leq A} d\xi \frac{e^{i\xi \cdot x}}{|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Eseguiamo ora l'integrazione nella variabile ξ mediante le coordinate sferiche in cui l'asse verticale ha direzione e verso di x , cosicché

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\Phi}, \psi \rangle &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx \widehat{\psi}(x) \int_0^A dr 2\pi r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{e^{ir|x|\cos\theta}}{r^2} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \widehat{\psi}(x) \int_0^A dr \int_{-1}^1 d\eta e^{ir|x|\eta} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \int dx \widehat{\psi}(x) \int_0^A dr \frac{\sin(r|x|)}{r|x|} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \int dx \frac{\widehat{\psi}(x)}{|x|} \int_0^{A|x|} dq \frac{\sin(q)}{q} = \int dx \frac{\widehat{\psi}(x)}{4\pi|x|}.\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue per convergenza dominata, in quanto

$$\begin{aligned}(i) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\psi}(x)}{|x|} \int_0^{A|x|} dq \frac{\sin(q)}{q} &= \frac{\pi}{2} \frac{\widehat{\psi}(x)}{|x|} \quad \forall x \neq 0, \\ (ii) \quad \left| \frac{\widehat{\psi}(x)}{|x|} \int_0^{A|x|} dq \frac{\sin(q)}{q} \right| &\leq C \frac{|\widehat{\psi}(x)|}{|x|} \quad (\text{funzione integrabile}).\end{aligned}$$

Pertanto una soluzione fondamentale è data dalla distribuzione regolare

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{4\pi|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Caso $d = 2$. Poiché la funzione $|\xi|^{-2}$ non è localmente integrabile in $\mathbb{R}^2$, essa non è una soluzione dell'equazione $|\xi|^2 \widehat{\Phi}(\xi) = 1$. Osserviamo che definisce invece una distribuzione temperata il valore principale $\mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}$,

$$\left\langle \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \psi \right\rangle = \int_{|\xi| \leq 1} d\xi \frac{\psi(\xi) - \psi(0)}{|\xi|^2} + \int_{|\xi| > 1} d\xi \frac{\psi(\xi)}{|\xi|^2}, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left\langle |\xi|^2 \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \psi \right\rangle &= \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, |\xi|^2 \psi \right\rangle = \int_{|\xi| \leq 1} d\xi \frac{|\xi|^2 \psi(\xi) - 0 \psi(0)}{|\xi|^2} + \int_{|\xi| > 1} d\xi \frac{|\xi|^2 \psi(\xi)}{|\xi|^2} \\ &= \int d\xi \psi(\xi) = \langle 1, \psi \rangle,\end{aligned}$$

cosicché $\mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}$ è una soluzione di $|\xi|^2 \widehat{\Phi}(\xi) = 1$. Possiamo quindi scegliere $\widehat{\Phi}(\xi) = \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}$. Calcoliamo la trasformata inversa $\Phi = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2} \right)$, soluzione dell'equazione

$$\left\langle \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \psi \right\rangle = \langle \Phi, \widehat{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Essendo $\psi(\xi) - \psi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \hat{\psi}(x)(e^{i\xi \cdot x} - 1)$ si ha

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \psi \right\rangle &= \int_{|\xi| \leq 1} d\xi \frac{\psi(\xi) - \psi(0)}{|\xi|^2} + \int_{|\xi| > 1} d\xi \frac{\psi(\xi)}{|\xi|^2} \\ &= \int_{|\xi| \leq 1} d\xi \int dx \frac{\hat{\psi}(x)(e^{i\xi \cdot x} - 1)}{(2\pi)^2 |\xi|^2} + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{1 < |\xi| \leq A} d\xi \int dx \frac{\hat{\psi}(x)e^{i\xi \cdot x}}{(2\pi)^2 |\xi|^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \hat{\psi}(x) \int_{|\xi| \leq 1} d\xi \frac{e^{i\xi \cdot x} - 1}{|\xi|^2} + \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \hat{\psi}(x) \int_{1 < |\xi| \leq A} d\xi \frac{e^{i\xi \cdot x}}{|\xi|^2}. \end{aligned}$$

In coordinate polari, in cui l'asse verticale ha direzione e verso di x ,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \psi \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \hat{\psi}(x) \int_0^1 dr r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ir|x|\cos\theta} - 1}{r^2} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \hat{\psi}(x) \int_1^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{ir|x|\cos\theta}}{r^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dx \hat{\psi}(x) \left[\int_0^1 dr \frac{J_0(r|x|) - 1}{r} + \int_1^\infty dr \frac{J_0(r|x|)}{r} \right], \end{aligned}$$

avendo introdotto la *funzione di Bessel* di ordine zero,

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{iu\cos\theta}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente $J_0(0) = 1$ e $J_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre dimostriamo più avanti che $|J_0(u)| \leq C/\sqrt{u}$, cosicché il limite $A \rightarrow \infty$ fornisce un integrale assolutamente convergente. Con la sostituzione $u = r|x|$ otteniamo infine

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \psi \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dx \hat{\psi}(x) \left[\int_0^{|x|} du \frac{J_0(u) - 1}{u} + \int_{|x|}^\infty du \frac{J_0(u)}{u} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dx \hat{\psi}(x) (C_0 - \log|x|), \end{aligned}$$

avendo posto

$$C_0 = \int_0^1 du \frac{J_0(u) - 1}{u} + \int_1^\infty du \frac{J_0(u)}{u}.$$

Pertanto una soluzione fondamentale è data dalla distribuzione regolare

$$\Phi_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x|, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Rimane da dimostrare la stima sull'andamento della funzione di Bessel per $u \rightarrow +\infty$. A tal scopo scriviamo, per $u \geq 1$,

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{iu\cos\theta} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\eta \frac{e^{iu\eta}}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\eta \frac{\cos(u\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 d\eta \frac{\cos(u\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{2}{\pi} [A_1(u) + A_2(u)], \end{aligned}$$

con

$$A_1(u) = \int_0^{1-u^{-1}} d\eta \frac{\cos(u\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad A_2(u) = \int_{1-u^{-1}}^1 d\eta \frac{\cos(u\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Si ha ora

$$\begin{aligned} A_1(u) &= \int_0^{1-u^{-1}} d\eta \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{d}{d\eta} \frac{\sin(u\eta)}{u} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\sin(u\eta)}{u} \Big|_0^{1-u^{-1}} \\ &\quad - \frac{1}{u} \int_0^{1-u^{-1}} d\eta \frac{2\eta \sin(u\eta)}{(1-\eta^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

da cui

$$|A_1(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u} \int_0^{1-u^{-1}} d\eta \frac{2\eta}{(1-\eta^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \Big|_0^{1-u^{-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{u}}.$$

D'altra parte

$$|A_2(u)| \leq \int_{1-u^{-1}}^1 d\eta \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \leq -2\sqrt{1-\eta} \Big|_{1-u^{-1}}^1 = \frac{2}{\sqrt{u}}.$$

Dunque

$$|J_0(u)| \leq \frac{8}{\pi\sqrt{u}} \quad \forall u \geq 1.$$

OSSERVAZIONE 9.2. Più in generale, si può dimostrare che la soluzione in dimensione $d \geq 3$ si scrive

$$\Phi_d(x) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d|x|^{d-2}},$$

dove σ_d è l'area della superficie della sfera unitaria in dimensione d .

DEFINIZIONE 9.4 (Funzioni di Green). *Si definisce funzione di Green per l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^3$ la funzione*

$$G_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y.$$

Si definisce funzione di Green per l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$G_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y.$$

Essendo $G_d(x, y) = \Phi_d(x-y)$, $d = 2, 3$, per quanto discusso $G_d(x, y)$ è soluzione del problema

$$\Delta_x G_d(x, y) + \delta_y(x) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d). \quad (9.8)$$

L'equazione (9.8) verrà comunque dimostrata direttamente nella prossima sezione, vedi l'Osservazione 9.4. La funzione di Green in $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) gode delle seguenti ovvie proprietà.

- Regolarità: $G_d(x, y)$ è C^∞ su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x \neq y\}$
- Simmetria: $G_d(x, y) = G_d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$.

- Comportamento alla frontiera:

$$\begin{aligned}\lim_{|x-y| \rightarrow 0} G_3(x, y) &= +\infty, & \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} G_3(x, y) &= 0, \\ \lim_{|x-y| \rightarrow 0} G_2(x, y) &= +\infty, & \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} G_2(x, y) &= -\infty.\end{aligned}$$

- Armonicità: $\Delta_x G_d(x, y) = 0$ per ogni $x \neq y$.

ESERCIZIO 9.3. Verificare per calcolo diretto che $\Delta \Phi_d(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$.

9.4.1. Interpretazione fisica delle funzioni di Green. La forza di interazione gravitazionale che un punto di massa m_0 posto in $y \in \mathbb{R}^3$ esercita su un punto di massa m posto in $x \in \mathbb{R}^3$ è pari a

$$F(x) = -Gm_0m \frac{x-y}{|x-y|^3} = m \nabla U(x), \quad U(x) = \frac{Gm_0}{|x-y|},$$

con G la costante di gravità universale. La funzione di Green $G_3(x, y)$ può allora interpretarsi come il potenziale gravitazionale nel punto x generato da un punto materiale di massa $m_0 = 1/(4\pi G)$ posto in y .

Il significato fisico di $G_2(x, y)$ è meno evidente e richiede un calcolo. Consideriamo un filo rettilineo di lunghezza infinita e densità di massa costante ρ . Calcoliamo la forza gravitazionale da esso esercitata su un punto materiale P di massa m situato esternamente al filo.

Per ragioni di simmetria la forza dipende solo dalla componente di OP ortogonale alla direzione del filo (e sarà diretta ortogonalmente alla direzione del filo). Per calcolarla fissiamo il sistema di coordinate in modo tale che il filo è collocato lungo l'asse verticale ed il punto P giace sul piano coordinato orizzontale. Dunque, dette $x = (x_1, x_2)$ le coordinate di P sul piano, la forza esercitata dal filo su P è

$$\underline{F}(x) = -m \int dz \frac{G\rho(\underline{x} - \underline{z})}{|\underline{x} - \underline{z}|^3} = -m \int dz \frac{G\rho}{(|x|^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -z \end{pmatrix},$$

essendo $\underline{x} = (x, 0) \in \mathbb{R}^3$ le coordinate spaziali di P e $\underline{z} = (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ le coordinate del generico punto lungo il filo.

La terza componente della forza è nulla,¹ quindi $\underline{F}(x) = \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, dove (con le sostituzioni $z = |x|t$ e quindi $t = \tan \theta$ nell'integrale).

$$F(x) = -m \frac{G\rho x}{|x|^2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = -m \frac{G\rho x}{|x|^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta = -m \frac{2G\rho x}{|x|^2} = m \nabla U(x),$$

con $U(x) = -2G\rho \log|x|$. La funzione di Green $G_2(x, y)$ può allora interpretarsi come il potenziale gravitazionale nel punto x del piano generato da un filo rettilineo di lunghezza infinita e densità di massa costante $\rho = 1/(4\pi G)$, che interseca ortogonalmente il piano nel punto y .

¹È nulla poiché pari all'integrale della funzione integrabile e dispari $z/(|x|^2 + z^2)^{3/2}$.

È interessante notare che se avessimo provato a calcolare direttamente il potenziale avremmo ottenuto un integrale divergente:

$$U(x) = \int dz \frac{G\rho}{(|x|^2 + z^2)^{1/2}} = \infty.$$

La contraddizione è solo apparente: il potenziale è definito a meno di una costante additiva che può dipendere da z . Possiamo sceglierla in modo tale da eliminare questa divergenza. A tal scopo calcoliamo prima il potenziale di un filo finito di lunghezza $2L$. Nel farlo aggiungiamo una costante arbitraria dipendente da L :

$$\begin{aligned} U_L(x) &= \int_{-L}^L dz \frac{G\rho}{(|x|^2 + z^2)^{1/2}} + C_L = \int_{-L/|x|}^{L/|x|} dt \frac{G\rho}{(1 + t^2)^{1/2}} + C_L \\ &= 2G\rho \log \left(\frac{L}{|x|} + \sqrt{\frac{L}{|x|} + 1} \right) + C_L. \end{aligned}$$

Scegliamo $C_L = -2G\rho \log L$ e ritroviamo (nel limite $L \rightarrow \infty$)

$$U(x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} U_L(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} 2G\rho \log \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L}{|x|} + 1} \right) = -2G\rho \log |x|.$$

OSSERVAZIONE 9.3. In virtù della legge di Coulomb, analoghe interpretazioni si hanno in termini del campo elettrico generato da una carica puntiforme oppure da un filo rettilineo con densità di carica uniforme.

9.5. Formule di Green

Le seguenti formule (o identità) di Green saranno utilizzate ripetutamente. Nel seguito Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, con frontiera $\partial\Omega$ regolare di classe C^2 . Indichiamo al solito con $\nu = \nu(y)$ la normale alla frontiera $\partial\Omega$ nel punto $y \in \partial\Omega$ diretta verso l'esterno di Ω e con $\frac{\partial}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla$ la derivata normale.

I Formula di Green. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ allora

$$\int_{\Omega} dx \, v(x) \Delta u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \, v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \int_{\Omega} dx \, \nabla v(x) \cdot \nabla u(x).$$

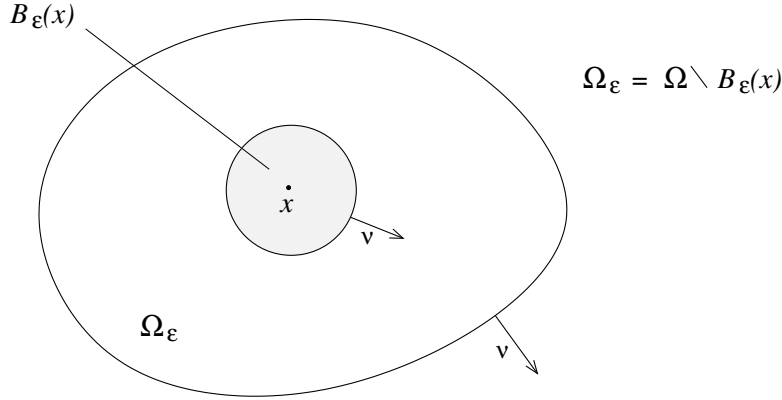
II Formula di Green. Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ allora

$$\int_{\Omega} dx \, [v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)] = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \left[v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right].$$

III Formula di Green (o Formula di rappresentazione integrale di Green). Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ allora

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \left[G_d(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial G_d}{\partial \nu}(x, y) \right] - \int_{\Omega} dy \, G_d(x, y) \Delta u(y),$$

dove chiaramente $G_d(x, y) = \Phi_d(x - y)$ e $\frac{\partial G_d}{\partial \nu}(x, y) = \nabla_y G_d(x, y) \cdot \nu(y)$.

FIGURA 9.1. Il dominio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$.

Per dimostrare la I Formula di Green fissiamo $\delta > 0$ piccolo e poniamo $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Chiaramente Ω_δ è un dominio regolare con $\overline{\Omega_\delta} \subset \Omega$. Utilizzando l'identità $\text{div}(v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$ segue che

$$\int_{\Omega_\delta} dx v(x) \Delta u(x) = \int_{\Omega_\delta} dx \text{div}[v(x) \nabla u(x)] - \int_{\Omega_\delta} dx \nabla v(x) \cdot \nabla u(x).$$

Poiché $v \nabla u \in C^1(\overline{\Omega_\delta}; \mathbb{R}^d)$ possiamo applicare il teorema della divergenza e concludere che

$$\int_{\Omega_\delta} dx v(x) \Delta u(x) = \int_{\partial\Omega_\delta} d\sigma(y) v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \int_{\Omega_\delta} dx \nabla v(x) \cdot \nabla u(x).$$

Essendo ora $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\partial\Omega_\delta} d\sigma(y) v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \int_{\Omega_\delta} dx \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) \right] \\ = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \int_{\Omega} dx \nabla v(x) \cdot \nabla u(x). \end{aligned}$$

Pertanto la I Formula di Green è dimostrata con l'attenzione sul fatto che l'integrale a primo membro deve essere considerato improprio, ovvero

$$\int_{\Omega} dx v(x) \Delta u(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_\delta} dx v(x) \Delta u(x).$$

Chiaramente se inoltre $u \in C^2(\overline{\Omega})$ allora l'integrale $\int_{\Omega} dx v(x) \Delta u(x)$ ha senso anche come integrale proprio.

La II Formula di Green segue banalmente scrivendo la prima identità per entrambe le coppie ordinate (u, v) e (v, u) e sottraendole membro a membro. Rimane da dimostrare la terza. Senza perdere di generalità consideriamo il caso $d = 3$ (il caso $d = 2$ è analogo e viene lasciato come esercizio), e poniamo per semplicità $G(x, y) = G_3(x, y)$, dunque

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|}.$$

Fissato $x \in \Omega$ sia $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che la bolla $B_\varepsilon(x)$ abbia chiusura contenuta in Ω , e poniamo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, vedi Figura 9.1. Ovviamente $G(x, y)$ è una funzione armonica rispetto alla variabile y nel dominio Ω_ε . Pertanto, dalla II Formula di Green applicata con $v(y) = G(x, y)$, ed osservando che $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} dy G(x, y) \Delta u(y) &= \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) [G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)] \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) [u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)], \end{aligned} \quad (9.9)$$

dove nel secondo integrale ν è la normale esterna alla bolla $B_\varepsilon(x)$ e quindi diretta internamente a Ω_ε (da cui il segno opposto). Ma se $y \in B_\varepsilon(x)$ allora $|y - x| = \varepsilon$ e $\nu(y) = \frac{y-x}{\varepsilon}$; pertanto

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}, \quad \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -\frac{y-x}{4\pi\varepsilon^3} \cdot \nu(y) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \quad \forall y \in \partial B_\varepsilon(x),$$

cosicché, per il teorema della media,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) u(y) \rightarrow -u(x) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Infine, avendo $G(x, y)$ in $y = x$ una singolarità integrabile in $\mathbb{R}^3$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} dy G(x, y) \Delta u(y) = \int_{\Omega} dy G(x, y) \Delta u(y).$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ nella (9.9) troviamo pertanto l'identità cercata.

OSSERVAZIONE 9.4. Mediante la III Formula di Green possiamo verificare direttamente l'equazione (9.8). Infatti, fissata una qualsiasi funzione di prova $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, scegliamo Ω un dominio regolare contenente il punto y ed il supporto di ψ , ed applichiamo la III Formula di Green alla funzione ψ nel punto $x = y$. L'integrale sulla frontiera di Ω è nullo poiché $\partial\Omega$ è contenuta nell'insieme complementare del supporto di ψ , dove questa funzione è identicamente nulla. Analogamente, essendo ψ identicamente nulla nel complementare di Ω , l'integrale di volume su Ω può essere esteso a tutto $\mathbb{R}^d$. La III Formula di Green si riduce quindi all'identità

$$\psi(y) = - \int dz G_d(x, z) \Delta \psi(z),$$

che, vista l'arbitrarietà di ψ , dimostra (9.8).

9.6. Funzioni armoniche

In questa sezione studiamo le principali proprietà delle funzioni armoniche. In quanto segue indichiamo con Ω un dominio (aperto e connesso) di $\mathbb{R}^d$ con frontiera $\partial\Omega$ regolare di classe C^2 .

LEMMA 9.5. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ armonica in Ω . Allora

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente applicare la I Formula di Green con $v = 1$. $\square$

LEMMA 9.6. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ armonica in Ω . Vale allora la seguente rappresentazione integrale,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \left[G_d(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial G_d}{\partial \nu}(x, y) u(y) \right].$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente applicare la III Formula di Green e notare che l'integrale di volume è nullo poiché $\Delta u = 0$ in Ω . $\square$

ESERCIZIO 9.4. Si consideri la formula integrale di Cauchy per la funzione analitica f ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

dove $\gamma = \partial\Omega$ è una curva semplice, frontiera dell'aperto Ω del piano complesso $\mathbb{C}$ contenuto nel dominio di analiticità di f . Posto $z = x_1 + ix_2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(z) = u(x) + iv(x)$, dimostrare che le identità delle parti reale ed immaginaria

$$u = \Re \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right), \quad v = \Im \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right)$$

sono la rappresentazione integrale delle funzioni armoniche $u(x)$ e $v(x)$.

[Suggerimento: utilizzare le equazioni di Cauchy-Riemann].

LEMMA 9.7 (I Teorema della media). Sia $u \in C^2(B_R(x_0)) \cap C(\overline{B_R(x_0)})$ armonica in $B_R(x_0)$. Allora,

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} d\sigma(y) u(y)$$

(dove quindi $|\partial B_R(x_0)|$ è pari a $2\pi R$ [risp. $4\pi R^2$] se $d = 2$ [risp. $d = 3$]).

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso $d = 3$, se $d = 2$ il ragionamento è del tutto analogo. Fissiamo $0 < r < R$ ed applichiamo il Lemma 9.6 alla funzione $u \in C^2(\overline{B_r(x_0)})$ armonica in $B_r(x_0)$ per calcolarne il valore nel centro x_0 . Poiché

$$G_3(x_0, y) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial \nu}(x_0, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \quad \forall y \in \partial B_r(x_0), \quad (9.10)$$

otteniamo

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) + \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y).$$

Ma il primo integrale a secondo membro è nullo per il Lemma 9.5, mentre il termine rimanente è proprio la media aritmetica di u sulla superficie $\partial B_r(x_0)$. Abbiamo in tal modo dimostrato che

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y) \quad \forall r \in (0, R). \quad (9.11)$$

Poiché per ipotesi la funzione u è continua su $\overline{B_R(x_0)}$, possiamo passare al limite nella precedente uguaglianza per $r \rightarrow R^-$ ed otteniamo la tesi. $\square$

LEMMA 9.8 (II Teorema della media). *Sia $u \in C^2(B_R(x_0)) \cap C(\overline{B_R(x_0)})$ armonica in $B_R(x_0)$. Allora,*

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} dy u(y)$$

(dove quindi $|B_R(x_0)|$ è pari a πR^2 [risp. $4\pi R^3/3$] se $d = 2$ [risp. $d = 3$]).

DIMOSTRAZIONE. Segue dal lemma precedente. Moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza (9.11) per $|\partial B_r(x_0)|$ ed integrando sull'intervallo $[0, R]$, otteniamo

$$\int_0^R dr |\partial B_r(x_0)| u(x_0) = \int_0^R dr \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y),$$

ovvero, per il Teorema di Fubini,

$$|B_R(x_0)| u(x_0) = \int_{B_R(x_0)} dy u(y),$$

che è la tesi. $\square$

TEOREMA 9.9 (Principio del massimo). *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armonica in Ω . Se u non è costante in Ω allora essa assume il massimo ed il minimo soltanto sulla frontiera, ovvero*

$$u(x) \neq \text{cost.} \quad \implies \quad \min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che se u assume il valore massimo in un punto di Ω allora u è costante. Questo risultato applicato poi alla funzione armonica $-u$ implica l'analoga affermazione nel caso in cui u assuma il valore minimo in un punto di Ω . Supponiamo pertanto che

$$\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Sia $B_{R_0}(x_0)$ una bolla di centro x_0 contenuta in Ω (ad esempio quella di raggio più grande). Sappiamo che $u(x) \leq M$ per ogni $x \in B_{R_0}(x_0)$. D'altra parte, per il Lemma 9.8,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_{R_0}(x_0)|} \int_{B_{R_0}(x_0)} dy u(y). \quad (9.12)$$

Deduciamo da ciò che $u(x) = M$ in tutta la bolla $\overline{B_{R_0}(x_0)}$. Infatti, supponendo per assurdo che esista un punto $y \in B_{R_0}(x_0)$ tale che $u(y) = M - \delta$, con $\delta > 0$, si ha per continuità $u(x) < M - \frac{1}{2}\delta$ in tutta una bolla $B_\varepsilon(y) \subset B_{R_0}(x_0)$ di raggio ε

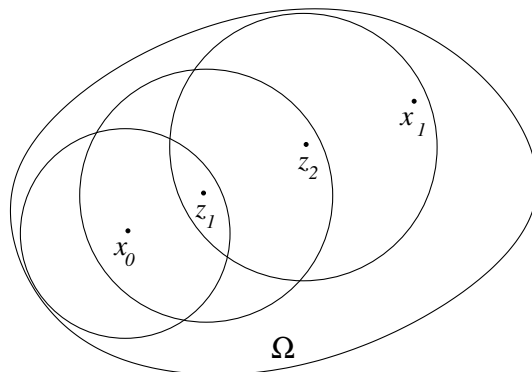


FIGURA 9.2. Successione di bolle che connette due punti x_0 ed x_l di Ω , tale che il centro di ciascuna è nella chiusura della precedente.

sufficientemente piccolo. Ma allora la media di u sulla bolla $B_{R_0}(x_0)$ non è più grande di $M - \frac{1}{2}\delta \frac{|B_\epsilon(y)|}{|B_{R_0}(x_0)|} < M$, in contraddizione con l'uguaglianza (9.12).

Sia ora x_1 un qualsiasi altro punto di Ω . Per la connessione di Ω possiamo determinare una successione finita di bolle $B_{R_j}(z_j)$, $j = 0, \dots, N$, tutte contenute in Ω e tali che

$$z_0 = x_0, \quad z_N = x_1, \quad z_j \in \overline{B_{R_{j-1}}(z_{j-1})} \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Poiché $z_1 \in \overline{B_{R_0}(x_0)}$ si ha $u(z_1) = M$ e quindi, riapplicando il ragionamento sopra esposto, deduciamo che $u(x) = M$ per ogni $x \in B_{R_1}(z_1)$. Ripetendo l'argomento N volte concludiamo che $u(x_1) = M$. Vista l'arbitrarietà del punto x_1 abbiamo pertanto dimostrato che $u = M$ su tutto Ω . $\square$

COROLLARIO 9.10. *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è armonica in Ω ed $u = 0$ in $\partial\Omega$ allora $u = 0$ in Ω . Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ è armonica in Ω e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ in $\partial\Omega$ allora u è costante in Ω .*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue direttamente dal principio del massimo. Per dimostrare la seconda affermazione utilizziamo la I Formula di Green con $u = v$, ottenendo

$$\int_{\Omega} dx |\nabla u|^2 = \int_{\partial\Omega} d\sigma u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

da cui $\nabla u = 0$ in Ω e dunque u è costante in Ω . $\square$

COROLLARIO 9.11. *Ogni funzione armonica è infinitamente derivabile nel suo dominio di armonicità.*

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza della formula di rappresentazione integrale delle funzioni armoniche. Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω (non necessariamente limitato). Scelto un qualsiasi $x_0 \in \Omega$, siano $\delta > 0$ e D un dominio limitato

con frontiera regolare tali che

$$\overline{B_\delta(x_0)} \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega.$$

Per il Lemma 9.6 si ha, in particolare,

$$u(x) = \int_{\partial D} d\sigma(y) \left[G_d(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial G_d}{\partial \nu}(x, y) u(y) \right] \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Poiché la distanza di $B_\delta(x_0)$ dalla frontiera ∂D è positiva, le funzioni $G_d(x, y)$ e $\frac{\partial G_d}{\partial \nu}(x, y)$ sono infinitamente derivabili rispetto al parametro x e limitate con tutte le loro derivate per $(x, y) \in \overline{B_\delta(x_0)} \times \partial D$. Pertanto è possibile derivare rispetto ad x infinite volte l'integrale nel membro di destra della precedente uguaglianza, dunque $u \in C^\infty(B_\delta(x_0))$. Per l'arbitrarietà nella scelta di x_0 , il corollario è così dimostrato. $\square$

COROLLARIO 9.12. *Una funzione armonica non costante non può avere massimi o minimi locali all'interno del suo dominio di armonicità.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista un punto x_0 nel dominio in cui u è estrema. Potremmo allora determinare un opportuno intorno di x_0 dove u sia non costante e raggiunga il suo valore massimo o minimo in x_0 , in contraddizione con il principio del massimo (applicato in tale intorno). $\square$

COROLLARIO 9.13. *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armonica in Ω . Allora*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial \Omega} |u| \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal principio del massimo: se u non è costante allora

$$|u(x)| < \max \left\{ \left| \min_{\partial \Omega} u \right|; \left| \max_{\partial \Omega} u \right| \right\} = \max_{\partial \Omega} |u| \quad \forall x \in \Omega.$$

$\square$

COROLLARIO 9.14. *Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ armonica in $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ e tale che $u(x) \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow \infty$. Allora*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial \Omega} |u| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $\Omega \subset B_R(0)$. Per il Corollario 9.13 applicato in $B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$ si ha

$$|u(x)| \leq \max_{\partial \Omega \cup \partial B_R(0)} |u| \leq \max_{\partial \Omega} |u| + \max_{\partial B_R(0)} |u| \quad \forall x \in \overline{B_R(0)} \setminus \Omega.$$

Poiché $\max_{\partial B_R(0)} |u| \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$ l'asserto segue nel limite $R \rightarrow \infty$. $\square$

Concludiamo con un teorema di unicità e stabilità del problema di Laplace-Dirichlet interno per l'equazione di Laplace.

TEOREMA 9.15. *Sia Ω un dominio limitato con frontiera regolare e sia $g \in C(\partial\Omega)$. Allora il problema Laplace-Dirichlet (9.3) possiede al più una soluzione in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Inoltre, assegnate $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$, se $u_{g_1}, u_{g_2} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sono soluzioni classiche dei corrispondenti problemi di Laplace-Dirichlet, si ha*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue dalla seconda affermazione per $g_1 = g_2 = g$. Quest'ultima affermazione è conseguenza immediata del Corollario 9.13 applicato alla funzione armonica $u = u_{g_1} - u_{g_2}$. $\square$

ESERCIZIO 9.5. Si trovi una funzione armonica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nel settore bidimensionale $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 < x_1\}$ tale che, per $x \in \partial\Omega$,

$$u(x) = \begin{cases} x_1 & \text{se } x = (x_1, 0), \\ x_1^2 + 2x_1 & \text{se } x_1 = x_2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 9.6. Siano $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $v \in C^2(\Omega_B) \cap C(\overline{\Omega}_B)$ due funzioni armoniche, dove Ω è un dominio (aperto e connesso) del piano e $\Omega_B = \Omega \setminus B$, con B un disco interamente contenuto in Ω . Supponendo che $u = v > 0$ in $\partial\Omega$ e $v = 0$ in ∂B , si dimostri che $u \geq v$ in Ω_B .

ESERCIZIO 9.7. Siano Ω un dominio limitato la cui frontiera è regolare, $g \in C(\partial\Omega)$ e $u_\infty \in \mathbb{R}$. Dimostrare che il problema di Laplace-Dirichlet esterno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ u(x) = g(x) & \text{per } x \in \partial\Omega, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = u_\infty \end{cases}$$

possiede al più una soluzione in $C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$.

9.7. Separazione delle variabili

La questione sull'esistenza della soluzione classica del problema di Laplace-Dirichlet su un dominio generico non è ovvia e non sarà argomento di queste note. Invece, nel caso di domini con particolari simmetrie, il problema può essere affrontato con metodi ad hoc, quali la separazione delle variabili, che forniscono soluzioni esplicite. Consideriamo due casi in dimensione $d = 2$.

9.7.1. Problema di Laplace-Dirichlet nel rettangolo. Senza perdere di generalità possiamo considerare il problema di Dirichlet nel rettangolo $\mathcal{R} = (0, A) \times (0, B)$, $A, B > 0$, poiché la soluzione nel caso generale si ottiene da questa con un'opportuna trasformazione affine. Dunque, assegnata $g \in C(\partial\mathcal{R})$, consideriamo il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{R} = (0, A) \times (0, B), \\ u(x) = g(x) & \text{per } x \in \partial\mathcal{R}. \end{cases}$$

Per poter applicare il metodo di separazione delle variabili occorre fare prima una serie di riduzioni del problema.

Passo 1: Scegliamo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in modo tale che la funzione armonica polinomiale

$$p(x) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_1 x_2 + \delta$$

soddisfi $p(x) = g(x)$ per $x = (0, 0), (A, 0), (0, B), (A, B)$.

Passo 2: Cerchiamo la soluzione nella forma $u = p + w$, cosicché la nuova incognita w è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \mathcal{R} = (0, A) \times (0, B) \\ w(x) = \bar{g}(x) & \text{per } x \in \partial\mathcal{R} \end{cases}$$

con $\bar{g}(x) = g(x) - p(x)$ tale che

$$\bar{g}(0, 0) = \bar{g}(A, 0) = \bar{g}(0, B) = \bar{g}(A, B) = 0.$$

Passo 3: Possiamo ora cercare w come sovrapposizione $w = v + \tilde{v}$ con

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \mathcal{R} = (0, A) \times (0, B) \\ v(x_1, 0) = \bar{g}(x_1, 0) & \text{per } x_1 \in [0, A] \\ v(x_1, B) = \bar{g}(x_1, B) & \text{per } x_1 \in [0, A] \\ v(0, x_2) = v(A, x_2) = 0 & \text{per } x_2 \in [0, B] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v} = 0 & \text{in } \mathcal{R} = (0, A) \times (0, B) \\ \tilde{v}(x_1, 0) = \tilde{v}(x_1, B) = 0 & \text{per } x_1 \in [0, A] \\ \tilde{v}(0, x_2) = \bar{g}(0, x_2) & \text{per } x_2 \in [0, B] \\ \tilde{v}(A, x_2) = \bar{g}(A, x_2) & \text{per } x_2 \in [0, B] \end{cases}$$

Si osservi che: (i) Il dato al bordo nei problemi di v e $\tilde{v}$ sono continui su $\partial\mathcal{R}$ poiché $\bar{g}$ si annulla sui vertici. (ii) I problemi sono equivalenti (basta scambiare le coordinate).

Passo 4: È quindi sufficiente risolvere il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{R} = (0, A) \times (0, B) \\ u(x_1, 0) = g_1(x_1) & \text{per } x_1 \in [0, A] \\ u(x_1, B) = g_2(x_1) & \text{per } x_1 \in [0, A] \\ u(0, x_2) = u(A, x_2) = 0 & \text{per } x_2 \in [0, B] \end{cases}$$

con $g_1, g_2 \in C([0, A])$ e nulle agli estremi. A tal scopo applichiamo il metodo della separazione delle variabili.

Cerchiamo dapprima delle funzioni armoniche che abbiano la forma di prodotto di funzioni di una sola variabile,

$$U(x) = X(x_1)Y(x_2).$$

Sostituendo in $\Delta U = 0$ si ottiene

$$X''(x_1)Y(x_2) + X(x_1)Y''(x_2) = 0.$$

Dunque, laddove $X(x_1)Y(x_2) \neq 0$,

$$\frac{X''(x_1)}{X(x_1)} = -\frac{Y''(x_2)}{Y(x_2)}.$$

Deve allora esistere una costante di separazione λ tale che

$$X''(x_1) = \lambda X(x_1), \quad Y''(x_2) = -\lambda Y(x_2).$$

Sull'equazione per X occorre imporre le condizioni al bordo $X(0) = X(A) = 0$, per cui si ha l'infinità di soluzioni

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{A^2}, \quad X_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{A}x_1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

In corrispondenza,

$$Y_n(x_2) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right).$$

Abbiamo quindi la famiglia di armoniche

$$U_n(x) = X_n(x_1)Y_n(x_2)$$

ciascuna dipendente da due costanti arbitrarie a_n, b_n e tale che

$$U_n(0, x_2) = U_n(A, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in [0, B].$$

Cerchiamo ora la soluzione u del problema come sovrapposizione delle U_n :

$$u(x) = \sum_{n \geq 1} U_n(x) = \sum_{n \geq 1} X_n(x_1)Y_n(x_2).$$

Le condizioni al bordo sui lati verticali del rettangolo sono soddisfatte, occorre imporre quelle sui lati orizzontali,

$$\sum_{n \geq 1} Y_n(0)X_n(x_1) = g_1(x_1), \quad \sum_{n \geq 1} Y_n(B)X_n(x_1) = g_2(x_1).$$

Quindi $Y_n(0)$ e $Y_n(B)$ sono i coefficienti dello sviluppo di g_1 e g_2 nella serie dei seni $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Sostituendo:

$$b_n = Y_n(0) = \frac{2}{A} \int_0^A dy g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi}{A}y\right) = \hat{g}_{1,n},$$

$$a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi}{A}B\right) = \frac{2}{A} \int_0^A dy g_2(y) \sin\left(\frac{n\pi}{A}y\right) = \hat{g}_{2,n},$$

e pertanto

$$\begin{aligned} Y_n(x_2) &= \frac{\hat{g}_{2,n} - \hat{g}_{1,n} \cosh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} \sinh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right) + \hat{g}_{1,n} \cosh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right) \\ &= \hat{g}_{2,n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} + \hat{g}_{1,n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}(B-x_2)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)}. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$u(x) = \sum_{n \geq 1} \left[\widehat{g}_{1,n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}(B - x_2)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} + \widehat{g}_{2,n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{A}x_1\right).$$

Dobbiamo infine stabilire ipotesi sufficienti su g per le quali che la soluzione formale appena trovata sia anche una soluzione classica del problema. Analizziamo a tal scopo le proprietà di convergenza uniforme e derivabilità termine a termine della serie. Si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{h+k} U_n}{\partial x_1^h \partial x_2^k}(x) \right| &= \left| \frac{d^h X_n}{dx_1^h}(x_1) \frac{d^k Y_n}{dx_2^k}(x_2) \right| \leq \left(\frac{n\pi}{A} \right)^h \left| \frac{d^k Y_n}{dx_2^k}(x_2) \right| \\ &\leq \left(\frac{n\pi}{A} \right)^{h+k} \left(|\widehat{g}_{2,n}| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} + |\widehat{g}_{1,n}| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{A}(B - x_2)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} \right). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, fissato $\varepsilon \in [0, B/2]$, per ogni $x_2 \in [\varepsilon, B - \varepsilon]$,

$$\begin{aligned} &|\widehat{g}_{2,n}| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{A}x_2\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} + |\widehat{g}_{1,n}| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{A}(B - x_2)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} \\ &\leq (|\widehat{g}_{1,n}| + |\widehat{g}_{2,n}|) \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{A}(B - \varepsilon)\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{A}B\right)} \\ &= (|\widehat{g}_{1,n}| + |\widehat{g}_{2,n}|) \frac{e^{n\pi(B-\varepsilon)/A} + e^{-n\pi(B-\varepsilon)/A}}{e^{n\pi B/A} - e^{-n\pi B/A}} \\ &= (|\widehat{g}_{1,n}| + |\widehat{g}_{2,n}|) e^{-n\pi\varepsilon/A} \frac{1 + e^{-2n\pi(B-\varepsilon)/A}}{1 - e^{-2n\pi B/A}}. \end{aligned}$$

Quindi:

- Se $g \in C(\partial\mathcal{R})$ allora $|\widehat{g}_{1,n}| + |\widehat{g}_{2,n}| \leq 2\|g\|_\infty$, cosicché la serie di u derivabile termine a termine in $\mathcal{R}$ infinite volte, in particolare $\Delta u = 0$ in $\mathcal{R}$.
- Se $g \in C^1(\partial\mathcal{R})$ allora $\sum_{n \geq 1} |\widehat{g}_{1,n}| + |\widehat{g}_{2,n}| < \infty$, cosicché la serie di u è anche sommabile uniformemente in $\overline{\mathcal{R}}$ e quindi $u \in C(\overline{\mathcal{R}})$ con $u = g$ su $\partial\mathcal{R}$.

Si osservi che occorrono ipotesi sul dato al bordo più forti della semplice continuità (qui abbiamo richiesto C^1 ma si può indebolire) poiché si cerca la soluzione non solo classica ma anche in forma di serie convergente.

9.7.2. Problema di Laplace-Dirichlet nel disco. Senza perdere di generalità possiamo considerare il problema di Dirichlet nel disco $B_R(0)$ centrato nell'origine (la soluzione nel caso generale si ottiene con una semplice traslazione). Osserviamo che in coordinate polari (r, θ) il dato al bordo dipende solo dalla variabile angolare,

$$g(y) = g(R \cos \theta, R \sin \theta) =: \tilde{g}(\theta), \quad y \in \partial B_R(0).$$

Pertanto possiamo cercare di separare le variabili r e θ . A tal fine occorre esprimere l'operatore di Laplace in tali coordinate. Introduciamo i versori

$$e_r = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \quad e_\theta = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2,$$

dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$. In particolare,

$$x = \begin{pmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \end{pmatrix} = r e_r, \quad \frac{de_r}{d\theta} = e_\theta, \quad \frac{de_\theta}{d\theta} = -e_r, \quad e_r \cdot e_\theta = 0. \quad (9.13)$$

Sia ora $F(x)$ una funzione scalare ed indichiamo con $\tilde{F}(r, \theta)$ la sua espressione in coordinate polari, dunque $\tilde{F}(r, \theta) := F(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Poiché $dx = dr e_r + r d\theta e_\theta$, si ha

$$dF = \nabla F \cdot dx = (\nabla F \cdot e_r) dr + (r \nabla F \cdot e_\theta) d\theta.$$

D'altra parte,

$$dF = d\tilde{F} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} dr + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} d\theta,$$

e pertanto

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} = \nabla F \cdot e_r, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} = r \nabla F \cdot e_\theta.$$

Altrimenti detto, l'operatore gradiente in coordinate polari si scrive

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Ne segue allora che

$$\begin{aligned} \Delta F &= \operatorname{div} \nabla F = \nabla \cdot \nabla F = \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left(e_r \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà dei versori $\{e_r, e_\theta\}$ dettagliate in (9.13). Concludiamo che l'operatore di Laplace in coordinate polari assume la forma seguente,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (9.14)$$

Cerchiamo ora delle funzioni armoniche nel disco che abbiano la forma di prodotto di funzioni di una sola variabile, dunque $u(r, \theta) = v(r)\chi(\theta)$. Sostituendo nell'equazione di Laplace ed utilizzando l'espressione trovata per il laplaciano in coordinate polari otteniamo

$$r^2 v''(r)\chi(\theta) + r v'(r)\chi(\theta) + v(r)\chi''(\theta) = 0,$$

da cui, laddove $v(r)\chi(\theta) \neq 0$,

$$\frac{\chi''(\theta)}{\chi(\theta)} = -\frac{r^2 v''(r) + r v'(r)}{v(r)}.$$

Deve allora esistere una costante di separazione λ tale che

$$\chi''(\theta) = \lambda \chi(\theta), \quad r^2 v''(r) + r v'(r) + \lambda v(r) = 0.$$

Perché la prima equazione dia luogo a soluzioni 2π -periodiche (θ è una variabile angolare) è necessario che sia $\lambda = -n^2$ con n un intero non negativo. Otteniamo in tal modo la famiglia di soluzioni periodiche

$$\chi_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \quad n \geq 0.$$

In corrispondenza a ciascun intero n l'equazione per la funzione $v(r)$ si scrive,

$$r^2 v''(r) + r v'(r) - n^2 v(r) = 0.$$

Per $n = 0$ si risolve per separazione delle variabili e si ottiene l'integrale generale $v_0(r) = C_0 + D_0 \log r$, mentre per $n \geq 1$ con la sostituzione di Eulero $s = \log r$ si riduce ad un'equazione a coefficienti costanti il cui integrale generale è $v_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$. Poiché siamo interessati a funzioni regolari anche nell'origine dobbiamo scegliere $D_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. In definitiva, rinominando le costanti arbitrarie, abbiamo ottenuto la seguente famiglia di funzioni armoniche,

$$U_0(r, \theta) = \frac{A_0}{2}, \quad U_n(r, \theta) = [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^n, \quad n \geq 1.$$

Possiamo ora cercare la soluzione del problema con dato al bordo fissato nella forma di sovrapposizione delle U_n ,

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] r^n, \quad 0 < r < R.$$

Imponendo le condizioni al bordo troviamo,

$$\tilde{g}(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] R^n.$$

Pertanto $A_n R^n$ e $B_n R^n$ sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $\tilde{g}$,

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} d\theta \tilde{g}(\theta) \cos(n\theta), \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} d\theta \tilde{g}(\theta) \sin(n\theta).$$

Come nel caso del rettangolo cerchiamo le condizioni sufficienti su g per le quali la soluzione formale è anche classica. Riscriviamo a tal scopo la serie nella forma

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [A_n R^n \cos(n\theta) + B_n R^n \sin(n\theta)] \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Quindi:

- Se $\tilde{g}$ è una funzione 2π -periodica e continua allora $|A_n R^n| + |B_n R^n| \leq 4\|\tilde{g}\|_\infty$, cosicché la serie a secondo membro può essere derivata termine a termine infinite volte e definisce una funzione armonica per $0 < r < R$ (l'esclusione di $r = 0$ è dovuto al fatto che le coordinate polari non sono definite nell'origine).
- Se $\tilde{g}$ è una funzione 2π -periodica e differenziabile allora

$$\sum_{n \geq 1} (|A_n R^n| + |B_n R^n|) < \infty,$$

cosicché la serie di u è anche sommabile uniformemente per $0 < r \leq R$ e quindi u è continua fino al bordo del disco con $u = g$ sulla frontiera.

Si osservi che come nel caso del rettangolo occorrono ipotesi sul dato al bordo più forti della semplice continuità (nuovamente, qui richiediamo C^1 ma si può indebolire) poiché si cerca la soluzione non solo classica ma anche in forma di serie convergente.

9.8. Formula integrale di Poisson

La formula integrale di Poisson fornisce la soluzione in forma chiusa del problema di Laplace-Dirichlet nel caso di un disco in $d = 2$ e di una bolla in $d = 3$: Se $\Omega = B_R(x_0)$ e $g \in C(\partial B_R(x_0))$ allora

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_d R} \int_{\partial B_R(x_0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|x - y|^d}, \quad (9.15)$$

dove

$$\sigma_d = |\partial B_1(0)| = \begin{cases} 2\pi & \text{se } d = 2, \\ 4\pi & \text{se } d = 3. \end{cases}$$

Dimostriamo ora la formula di Poisson nel caso $d = 2$ utilizzando il risultato ottenuto per separazione delle variabili (il caso $d = 3$ lo affrontiamo più avanti con tecniche differenti).

Senza perdere di generalità possiamo considerare il problema di Dirichlet nel disco $B_R(0)$ centrato nell'origine (la soluzione nel caso generale si ottiene con una semplice traslazione). Inserendo l'espressione esplicita dei coefficienti di Fourier e sfruttando l'identità trigonometrica

$$\cos(n\theta) \cos(n\theta') + \sin(n\theta) \sin(n\theta') = \cos[n(\theta - \theta')]$$

si ha

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \tilde{g}(\theta') + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \tilde{g}(\theta') \cos[n(\theta - \theta')] \left(\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \tilde{g}(\theta') \left\{ 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \cos[n(\theta - \theta')] \left(\frac{r}{R}\right)^n \right\}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se $a \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \cos[n\varphi] a^n &= 1 + 2\Re \sum_{n \geq 1} (ae^{i\varphi})^n = 1 + 2\Re \left[\frac{1}{1 - ae^{i\varphi}} - 1 \right] \\ &= \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Dunque

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta' \tilde{g}(\theta') \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta')}.$$

Osservando che $R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta') = |x - y|^2$ se $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $y = (R \cos \theta', R \sin \theta')$ e che $R d\theta' = d\sigma(y)$, tornando in coordinate cartesiane otteniamo la formula di Poisson,

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|x - y|^2}.$$

Nel disco $B_R(0)$ questa formula definisce una funzione armonica infinitamente derivabile. Questo fatto segue da come tale formula è stata derivata, ma ovviamente può anche essere verificato direttamente. Rimane invece da dimostrare che $u(x) \rightarrow g(\xi)$ se $x \rightarrow \xi \in \partial B_R(0)$ per ogni $g \in C(\partial B_R(0))$. A tal scopo notiamo che se $g \in C^1(\partial B_R(0))$ tale affermazione è vera in virtù della convergenza della serie di Fourier di $\tilde{g}$. Scegliendo allora $g = 1$, per il principio del massimo $u(x) = 1$ e pertanto sussiste la (non ovvia!) identità

$$1 = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{1}{|x - y|^2}, \quad (9.16)$$

che ora utilizziamo per dimostrare la continuità fino al bordo della soluzione di Poisson. Fissato $\xi \in \partial B_R(0)$ e scelto $\varepsilon > 0$ sia $\Gamma \subset \partial B_R(0)$ l'arco di circonferenza di lunghezza 2δ e centrato in ξ tale che $|g(y) - g(\xi)| < \varepsilon$ per ogni $y \in \Gamma$. Assumiamo δ piccolo a sufficienza perché si abbia $|y - \xi| \geq \frac{1}{3}\delta$ per ogni $y \in \partial B_R(0) \setminus \Gamma$ e fissiamo $x \in B_R(0)$ tale che $|x - \xi| < \frac{1}{4}\delta$. Si ha allora,

$$|u(x) - g(\xi)| = \left| \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{g(y) - g(\xi)}{|x - y|^2} \right| \leq I_1(x) + I_2(x),$$

dove

$$I_1(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\Gamma} d\sigma(y) \frac{|g(y) - g(\xi)|}{|x - y|^2},$$

$$I_2(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0) \setminus \Gamma} d\sigma(y) \frac{|g(y) - g(\xi)|}{|x - y|^2}.$$

Si ha ora

$$I_1(x) \leq \varepsilon \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{1}{|x - y|^2} = \varepsilon,$$

avendo utilizzato la (9.16) nell'ultimo passaggio. D'altra parte, essendo

$$|x - y| \geq |y - \xi| - |x - \xi| \geq \frac{\delta}{12} \quad \forall y \in \partial B_R(0) \setminus \Gamma,$$

si ha

$$I_2(x) \leq 2\|g\|_{\infty} \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \frac{144}{\delta^2} |\partial B_R(0) \setminus \Gamma| \leq \frac{288\|g\|_{\infty}}{\delta^2} (R^2 - |x|^2).$$

Pertanto $I_2(x) \rightarrow 0$ se $x \rightarrow \xi$, cosicché

$$\limsup_{x \rightarrow \xi} |u(x) - g(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Vista l'arbitrarietà nella scelta del parametro ε concludiamo che $u(x) \rightarrow g(\xi)$ per $x \rightarrow \xi$. $\square$

Un'importante conseguenza della formula di Poisson è l'inversione dei teoremi della media, cosicché la proprietà di media risulta essere caratteristica per le funzioni armoniche.

DEFINIZIONE 9.16. Una funzione $u \in C(\Omega)$ possiede la proprietà di media in Ω se

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} d\sigma(y) u(y) \quad \text{oppure} \quad u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} dy u(y)$$

per ogni (x, r) tali che $B_r(x) \subset \Omega$.

TEOREMA 9.17. Se $u \in C(\Omega)$ ha la proprietà di media in Ω allora u è armonica in Ω .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo preliminarmente che nella prova del principio del massimo abbiamo utilizzato unicamente la proprietà di media delle funzioni armoniche, pertanto anche le funzioni con la proprietà di media soddisfanno tale principio. Fissata ora una qualunque bolla $B \subset \Omega$, sia $v \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ la funzione armonica in B che coincide con u sulla frontiera ∂B . L'esistenza di tale funzione è garantita dalla formula integrale di Poisson. Poniamo ora $w(x) = v(x) - u(x)$, $x \in B$. Chiaramente w ha la proprietà di media in B ed è nulla sulla frontiera ∂B , pertanto $w(x) = 0$ per ogni $x \in B$ come conseguenza del principio del massimo. Altrimenti detto, $u = v$ in B , ovvero u è armonica in B . Per l'arbitrarietà nella scelta di B concludiamo che u è armonica in tutto Ω . $\square$

TEOREMA 9.18. [Disuguaglianza di Harnack] Sia $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ armonica e non negativa in $B_R(0)$. Allora

$$\frac{R^{d-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{d-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{d-1}} u(0) \quad \forall x \in B_R(0).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla formula di Poisson. Osserviamo infatti che se $y \in \partial B_R(0)$ allora $R-|x| \leq |y-x| \leq R+|x|$ per ogni $x \in B_R(0)$, cosicché

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_d R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{u(y)}{|x-y|^d} \leq \frac{R+|x|}{\sigma_d R} \frac{1}{(R-|x|)^{d-1}} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) u(y) \\ &= \frac{R^{d-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{d-1}} u(0), \end{aligned}$$

avendo applicato il I Teorema della media nell'ultima uguaglianza. Analogamente,

$$u(x) \geq \frac{R-|x|}{\sigma_d R} \frac{1}{(R+|x|)^{d-1}} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) u(y) = \frac{R^{d-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}} u(0).$$

$\square$

Ne segue un importante corollario.

TEOREMA 9.19. [Teorema di Liouville] Se u è armonica in $\mathbb{R}^d$ ed è limitata superiormente (oppure inferiormente) allora u è costante.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente considerare il caso $u(x) \leq M$ per qualche costante M , l'altro caso segue considerando la funzione armonica $-u$. La funzione $w(x) = M - u(x)$ è armonica non negativa su tutto $\mathbb{R}^d$, pertanto la disuguaglianza di Harnack si applica per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ ed ogni $R > |x|$. Ma nel limite $R \rightarrow \infty$

sia la stima dal basso che quella dall'alto tendono a $w(0)$, da cui $w(x) = w(0)$ e dunque la tesi. $\square$

ESERCIZIO 9.8. Si determini una funzione armonica u nella regione piana $B_1(0) \setminus \{0\}$ (il disco di raggio unitario privato del centro)² tale che, espressa in coordinate polari, $u = u(r, \theta)$, si abbia $u(1, \theta) = \sin(5\theta)$ ed inoltre verifichi

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r, \theta)}{\log r} = 2.$$

ESERCIZIO 9.9. Si risolva l'equazione di Laplace nel semidisco $B_1^+(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x_2 > 0\}$ con condizione al bordo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = (x_1, 0), |x_1| \leq 1, \\ 1 - e^{x_2} & \text{se } |x| = 1, x_2 > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 9.10. Sia Ω un dominio limitato ed u una funzione armonica su $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ tale che $u(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$. Si dimostri che esiste allora una costante positiva $a > 0$ per cui

$$|u(x)| \leq \frac{a}{|x|} \quad \text{se } |x| \geq a.$$

ESERCIZIO 9.11. Calcolare la funzione armonica u nella corona circolare $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ tale che

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| = 1 \\ x_1 x_2 + 2x_2 & \text{se } |x| = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 9.12. Calcolare (se esiste) la funzione armonica u nel dominio illimitato $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 2\}$ tale che

$$u(x) = x_1 x_2 + x_2^2 - 2 \quad \text{se } |x| = 2, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

9.9. Equazione di Poisson in domini limitati

Consideriamo ora il problema di Poisson-Dirichlet in un dominio limitato e regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{per } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.17)$$

Analizziamo in modo più approfondito la strategia esposta brevemente in Sezione 9.3. Vogliamo esprimere la soluzione mediante un'opportuna funzione di Green, definita come segue. Nel seguito indichiamo con $G(x, y) = \Phi(x - y)$ la soluzione fondamentale del laplaciano in $\mathbb{R}^d$ (omettendo il pedice d per non

²Suggerimento: Siano (r, θ) le coordinate polari nel piano, abbiamo dimostrato nella sezione precedente che le funzioni della forma

$$U_0(r, \theta) = C_0 + D_0 \log r,$$

$$U_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad n \geq 1$$

sono armoniche per $r \neq 0$.

appesantire la notazione). Una funzione $\mathcal{G}(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\Omega} \times \Omega$, è detta *funzione di Green* in Ω per l'operatore di Laplace se soddisfa le seguenti condizioni:

1) Per ogni $y \in \Omega$ si ha $\mathcal{G}(x, y) = G(x, y) + \gamma(x, y)$, con $x \mapsto \gamma(x, y)$ una funzione armonica in Ω e continua in $\overline{\Omega}$.

2) Si ha $\mathcal{G}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial\Omega \times \Omega$.

Ne segue che $\mathcal{G}$ soddisfa l'equazione $\Delta_x \mathcal{G}(x, y) + \delta_y(x) = 0$ in Ω con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Nel caso $d = 3$ può quindi essere interpretata come il potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme di intensità $\frac{1}{4\pi}$ posta in $y \in \Omega$, con Ω l'interno di una superficie conduttrice $\partial\Omega$ messa a terra. Osserviamo inoltre che, per ogni fissato $y \in \Omega$, la funzione $\gamma(x, y)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta \gamma(\cdot, y) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \gamma(x, y) = -G(x, y) & \text{per } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.18)$$

pertanto la funzione di Green $\mathcal{G}$ è unica (se esiste).

La funzione $\gamma(x, y)$ rappresenta la “parte regolare” di $\mathcal{G}$ ed è una funzione continua in $\overline{\Omega} \times \Omega$. Infatti, per il principio del massimo, per ogni $(x, y), (x_0, y_0) \in \overline{\Omega} \times \Omega$,

$$\begin{aligned} |\gamma(x, y) - \gamma(x_0, y_0)| &\leq |\gamma(x, y) - \gamma(x_0, y)| + |\gamma(x_0, y) - \gamma(x_0, y_0)| \\ &\leq |\gamma(x, y) - \gamma(x_0, y)| + \max_{x' \in \partial\Omega} |G(x', y) - G(x', y_0)|, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a zero per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

LEMMA 9.20. *La funzione di Green possiede le seguenti proprietà.*

i) $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$ per ogni $x, y \in \Omega$.

ii) $\mathcal{G}(x, y) > 0$ per ogni $x, y \in \Omega$.

iii) Se $d = 3$ allora $\mathcal{G}(x, y) < G(x, y)$ per ogni $x, y \in \Omega$, $x \neq y$.

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo con il dimostrare la simmetria di $\mathcal{G}$. Appliciamo la II Formula di Green alle funzioni armoniche $u(z) = \mathcal{G}(z, y)$ e $v(z) = \mathcal{G}(z, x)$ nella regione $\Omega \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))$ con ε piccolo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(z) \left[\mathcal{G}(z, y) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(z, x) - \mathcal{G}(z, x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(z, y) \right] \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} d\sigma(z) \left[\mathcal{G}(z, y) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(z, x) - \mathcal{G}(z, x) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(z, y) \right]. \end{aligned}$$

Lasciamo al lettore la prova del fatto che per $\varepsilon \rightarrow 0$ il primo integrale tende a $-\mathcal{G}(x, y)$ ed il secondo a $\mathcal{G}(y, x)$. Per dimostrare la positività della funzione di Green osserviamo che se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo allora $\mathcal{G}(x, y) > 0$ nella bolla $B_\varepsilon(y)$ (poiché la parte singolare $G(x, y)$ è positiva grande e domina sulla parte regolare $\gamma(x, y)$). Ma allora $\mathcal{G}(x, y)$ è una funzione armonica in $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$, nulla su $\partial\Omega$ e positiva su $\partial B_\varepsilon(y)$, pertanto positiva anche in $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ per il principio del massimo. Infine, se $d = 3$ allora $\gamma(x, y) < 0$ per $x \in \partial\Omega$, da cui, applicando di nuovo il principio del massimo, $\gamma(x, y) < 0$ in Ω , ovvero $\mathcal{G}(x, y) < G(x, y)$. $\square$

Nella dimostrazione della simmetria di $\mathcal{G}$ (e in quanto segue) stiamo tacitamente assumendo che la derivata normale $\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(x, y)$ esista regolare su $\partial\Omega$, affermazione vera ma che non dimostriamo.

TEOREMA 9.21. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ è soluzione del problema (9.17) allora

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(x, y) g(y) + \int_{\Omega} dy \mathcal{G}(x, y) f(y), \quad x \in \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. (traccia) Per la III Formula di Green,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \left[G(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) \right] + \int_{\Omega} dy G(x, y) f(y).$$

D'altra parte $\gamma(x, y)$ è armonica anche rispetto alla variabile y per la simmetria di $\mathcal{G}$, pertanto, applicando la II Formula di Green alle funzioni u e $y \mapsto \gamma(x, y)$,

$$- \int_{\Omega} dy \gamma(x, y) f(y) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \left[\gamma(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - g(y) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}(x, y) \right].$$

Sommando membro a membro le ultime due uguaglianze ed utilizzando che, sempre per la simmetria di $\mathcal{G}$, $G(x, y) + \gamma(x, y) = 0$ per $y \in \partial\Omega$, si perviene al risultato. Si osservi che nella dimostrazione abbiamo utilizzato la II Formula di Green, la cui applicabilità andrebbe dimostrata mediante uno studio del comportamento delle derivate di u e γ in prossimità della frontiera di Ω . $\square$

Per costruire la funzione di Green in domini di $\mathbb{R}^3$ con elevata simmetria risulta efficace talvolta il cosiddetto *metodo delle riflessioni* o *metodo delle cariche immagine*. Esso consiste nel cercare una posizione $\bar{y} = \bar{y}(y) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ ed una carica $q = q(y) \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathcal{G}(x, y) = G(x, y) + qG(x, \bar{y}).$$

Poiché $qG(x, \bar{y})$ è armonica in Ω , il problema si riduce a cercare $\bar{y}$ e q tali che $G(x, y) + qG(x, \bar{y}) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial\Omega \times \Omega$.

Applichiamo tale metodo nel caso importante in cui $\Omega = B_R(0)$. Occorre quindi richiedere che

$$\frac{1}{|x - y|} = - \frac{q}{|x - \bar{y}|} \quad \forall x: |x| = R,$$

da cui, passando all'uguaglianza dei quadrati e sviluppando,

$$2x \cdot (\bar{y} - q^2 y) = (1 - q^2)R^2 - q^2|y|^2 + |\bar{y}|^2.$$

Solo il membro di sinistra dipende dall'angolo che il vettore x di modulo R forma con $\bar{y} - q^2 y$, per cui la prima scelta naturale è che sia $\bar{y} = q^2 y$, dopodiché la carica q rimane fissata dalla condizione

$$R^2 - q^2 R^2 - q^2|y|^2 + q^4|y|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (q^2 - 1)(q^2|y|^2 - R^2) = 0.$$

Poiché la carica immagine deve essere posta all'esterno di Ω dobbiamo escludere la scelta $|q| = 1$, pervenendo così alla soluzione

$$q = - \frac{R}{|y|}, \quad \bar{y} = \frac{R^2}{|y|^2} y.$$

Sostituendo troviamo

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi||y|^2x - R^2y|},$$

che ha senso anche per $y \rightarrow 0$ (sebbene $|\bar{y}|$ diverga), precisamente

$$\mathcal{G}(x, 0) = \frac{1}{4\pi|x|} - \frac{1}{4\pi R}.$$

Questo risultato permette di derivare la formula integrale di Poisson per l'equazione di Laplace nella sfera. Infatti, posto $r = |y|$ ed indicando con θ l'angolo tra le direzioni x e y , la derivata normale di $\mathcal{G}$ sulla superficie sferica è

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(x, y) \Big|_{|y|=R} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + r^2 - 2|x|r \cos \theta}} \right]_{r=R} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{\sqrt{|x|^2 r^2 + R^4 - 2R^2|x|r \cos \theta}} \right]_{r=R} \\ &= \frac{1}{4\pi R} \frac{|x|^2 - R^2}{(|x|^2 + R^2 - 2|x|R \cos \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi R} \left[\frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^3} \right]_{|y|=R}. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione del problema di Laplace-Dirichlet (ovvero (9.17) con $f = 0$) nella sfera è

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|x - y|^3},$$

che è la formula integrale di Poisson per $d = 3$.

ESERCIZIO 9.13. Calcolare la funzione di Green per l'operatore di Laplace nel disco $B_R(0)$ cercandola nella forma

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y| + \frac{1}{2\pi} \log(q|x - \bar{y}|)$$

con $\bar{y} = \bar{y}(y) \notin B_R(0)$ e $q = q(y) > 0$. Dedurre quindi da questa la formula di Poisson in $d = 2$.

ESERCIZIO 9.14. Calcolare la soluzione del problema di Poisson-Laplace nel disco $B_1(0)$ con condizione al bordo $g(x) = 0$ e forzante $f(x) = |x|^4$.

9.10. Equazione di Poisson in $\mathbb{R}^3$

Assegnata $f = f(x) \in \mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^3$ limitata e integrabile, la funzione

$$u(x) = \int dy G(x, y) f(y) = \int dy \frac{1}{4\pi} \frac{f(y)}{|x - y|} \quad (9.19)$$

viene detta *potenziale volumetrico* e si interpreta come il potenziale newtoniano/coulombiano generato dalla distribuzione di massa/carica $\varrho = f/(4\pi)$, assumendo unità di misura in cui sia la costante di gravitazione universale che la costante dielettrica nel vuoto sono pari a uno.

Per le ipotesi fatte su f la definizione di $u(x)$ è ben posta, nel senso che l'integrale a secondo membro è assolutamente convergente:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{B_1(x)} dy \frac{1}{4\pi} \frac{|f(y)|}{|x-y|} + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1(x)} dy \frac{1}{4\pi} \frac{|f(y)|}{|x-y|} \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 dr \frac{r^2}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1(x)} dy |f(y)| \leq \frac{1}{2} (\|f\|_\infty + \|f\|_{L^1}). \end{aligned} \quad (9.20)$$

dove $\|f\|_1 = \int dy |f(y)|$ è la norma L^1 della funzione f .

Formalmente, $u(x)$ risolve l'equazione di Poisson

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

il che suggerisce in particolare un metodo alternativo al calcolo dell'integrale (9.19) per determinare per calcolare il campo generato dalla distribuzione f : risolvere direttamente l'equazione di Poisson. Passo preliminare è individuare ipotesi sufficienti su f tali che $u(x)$ sia soluzione classica (e non solo formale) di tale equazione. Il problema è chiaramente la derivazione sotto il segno di integrazione del potenziale volumetrico.

9.10.1. Distribuzioni regolari. Iniziamo con lo stabilire condizioni su f che consentano una derivazione rispetto ad x del potenziale volumetrico.

LEMMA 9.22. *Se $f(x)$ è una funzione limitata ed integrabile in $\mathbb{R}^3$ allora $u(x)$ è una funzione differenziabile e limitata in $\mathbb{R}^3$, le cui derivate si possono ottenere derivando sotto il segno di integrazione,*

$$\nabla u(x) = \int dy \nabla_x G(x, y) f(y).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\nabla_x G(x, y) = \nabla \Phi(x-y)$ ha una singolarità integrabile in $y = x$ ed ha modulo decrescente per $|y| \rightarrow \infty$, l'integrale a secondo membro è ben definito (converge assolutamente). Introduciamo ora una *regolarizzazione* di $G(x, y)$,

$$G_\varepsilon(x, y) = \Phi_\varepsilon(x - y), \quad \Phi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{per } |z| > \varepsilon, \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{|z|^2}{2\varepsilon^3} \right) & \text{per } |z| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

In particolare $\Phi_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ed inoltre

$$|\Phi_\varepsilon(z)| \leq |\Phi(z)|, \quad |\nabla \Phi_\varepsilon(z)| \leq |\nabla \Phi(z)| \quad \forall z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

e le derivate seconde di Φ_ε sono funzioni limitate: $\|D^2 \Phi_\varepsilon\|_\infty < \infty$. Sia quindi

$$u_\varepsilon(x) = \int dy G_\varepsilon(x, y) f(y).$$

Osserviamo che $u_\varepsilon(x)$ è una funzione limitata e differenziabile con

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int dy \nabla_x G_\varepsilon(x, y) f(y), \quad |u_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} (\|f\|_\infty + \|f\|_1),$$

dove la stima su $|u_\varepsilon(x)|$ si ottiene analogamente alla (9.20) essendo $|\Phi_\varepsilon(z)| \leq |\Phi(z)|$, mentre la differenziabilità si deduce dalla seguente stima

$$\begin{aligned} & \left| u_\varepsilon(x+h) - u_\varepsilon(x) - h \cdot \int dy \nabla_x G_\varepsilon(x, y) f(y) \right| \\ &= \left| \int dy [G_\varepsilon(x+h, y) - G_\varepsilon(x, y) - \nabla_x G_\varepsilon(x, y) \cdot h] f(y) \right| \\ &\leq \int dz |\Phi_\varepsilon(z+h) - \Phi_\varepsilon(z) - \nabla \Phi_\varepsilon(z) \cdot h| |f(x-z)| \\ &\leq \frac{1}{2} \|D^2 \Phi_\varepsilon\|_\infty \|f\|_{L^1} |h|^2. \end{aligned}$$

L'asserto del lemma segue allora se dimostriamo che

- 1) $u_\varepsilon \rightarrow u$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente in $\mathbb{R}^3$;
- 2) $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformemente in $\mathbb{R}^3$, con $v(x) = \int dy \nabla_x G(x, y) f(y)$.

Infatti, per i teoremi di derivazione di successioni di funzioni, questo garantisce che $v \in C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ e che $v = \nabla u$. Per quanto riguarda il punto 1) si ha,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} dy [\Phi(x-y) - \Phi_\varepsilon(x-y)] f(y) \right| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(0)} dz \frac{1}{4\pi|z|} = \|f\|_\infty \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Analogamente, per il punto 2),

$$\begin{aligned} |v(x) - \nabla u_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} dy [\nabla \Phi(x-y) - \nabla \Phi_\varepsilon(x-y)] f(y) \right| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(0)} dz \frac{1}{4\pi|z|^2} = 2\|f\|_\infty \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Il lemma è pertanto dimostrato. $\square$

TEOREMA 9.23. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tale che f e ∇f siano limitate ed integrabili. Allora $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ed è l'unica soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta u + f = 0$ in $\mathbb{R}^3$ che si annulla all'infinito.*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue dal teorema di Liouville. Infatti, se u_1, u_2 sono due tali soluzioni allora $w = u_1 - u_2$ è una funzione armonica limitata e dunque costante. Ma $w(x) \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow \infty$, per cui $w = 0$, ovvero $u_1 = u_2$.

Dimostriamo ora che $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$; la difficoltà rispetto al lemma precedente è che le derivate seconde di $G(x, y)$ hanno una singolarità non integrabile in $y = x$. Fissato un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ed un raggio $\varepsilon > 0$ scomponiamo $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ con

$$u_0(x) = \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy G(x, y) f(y), \quad u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(x_0)} dy G(x, y) f(y).$$

Notiamo che $u_1(x)$ è una funzione armonica in $B_\varepsilon(x_0)$. Infatti, ragionando come nella dimostrazione del Corollario 9.11, $u_1 \in C^\infty(B_\varepsilon(x_0))$ e le sue derivate si ottengono derivando sotto il segno di integrazione; in particolare $\Delta u_1(x) = 0$ per

ogni $x \in B_\varepsilon(x_0)$ essendo $\Delta_x G(x, y) = 0$ per $x \neq y$. Consideriamo ora la funzione $u_0(x)$ con $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Per il Lemma 9.22 applicato alla funzione $f(x)\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)$ sappiamo che $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^3)$, con

$$\nabla u_0(x) = \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy \nabla_x G(x, y) f(y).$$

Notiamo ora che

$$\nabla_x G(x, y) f(y) = \nabla \Phi(x - y) f(y) = -\nabla_y [\Phi(x - y) f(y)] + \Phi(x - y) \nabla f(y).$$

D'altra parte,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [\Phi(x - y) f(y)] = \operatorname{div} [\Phi(x - y) f(y) e_j],$$

dove e_j , $j = 1, 2, 3$, sono i versori coordinati. Ma applicando il teorema della divergenza si ha

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} dy \frac{\partial}{\partial y_j} [\Phi(x - y) f(y)] = \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) \Phi(x - y) f(y) e_j \cdot \nu(y),$$

cosicché, sostituendo nell'espressione di ∇u_0 ,

$$\nabla u_0(x) = \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy G(x, y) \nabla f(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) G(x, y) f(y) \nu(y).$$

Analogamente a quanto stabilito per $u_1(x)$, l'integrale di superficie a secondo membro definisce una funzione in $C^\infty(B_\varepsilon(x_0))$. Riguardo l'integrale di volume, possiamo applicare di nuovo il Lemma 9.22, questa volta a ciascuna componente della funzione $\nabla f(x)\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x)$, e dedurre che esso definisce una funzione in $C^1(\mathbb{R}^3)$. Vista l'arbitrarietà nella scelta di x_0 ed ε , concludiamo che $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

Dobbiamo ora calcolare il laplaciano di u . Nuovamente per l'arbitrarietà nella scelta di x_0 è sufficiente calcolare $\Delta u(x_0)$, e per far ciò possiamo utilizzare la precedente scomposizione. Poiché u_1 è una funzione armonica in $B_\varepsilon(x_0)$, si ha $\Delta u(x_0) = \Delta u_0(x_0) = \operatorname{div} \nabla u_0(x_0)$, dunque

$$\begin{aligned} \Delta u(x_0) &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy \nabla_x G(x_0, y) \cdot \nabla f(y) - \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) \nabla_x G(x_0, y) \cdot \nu(y) f(y) \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} dz \frac{z}{4\pi|z|^3} \cdot \nabla f(x_0 + z) - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} d\sigma(z) f(x_0 + z), \end{aligned}$$

avendo utilizzato (9.10) (con $r = \varepsilon$) per ottenere l'ultima espressione dell'integrale di superficie. Il primo integrale è infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0$ poiché

$$\left| \int_{B_\varepsilon(0)} dz \frac{z}{4\pi|z|^3} \cdot \nabla f(x_0 + z) \right| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_0^\varepsilon dr \frac{r^2}{r^2} = \|\nabla f\|_\infty \varepsilon.$$

Il secondo integrale converge invece a $-f(x_0)$ per il teorema della media. Dunque $\Delta u(x_0) + f(x_0) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^3$ come richiesto.

Rimane da verificare che $u(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$. Fissato $x \in \mathbb{R}^3$, per ogni $0 < \varepsilon < R = \frac{1}{2}|x|$ scomponiamo,

$$u(x) = \int_{B_R(0)} dy G(x, y) f(y) + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (B_R(0) \cup B_\varepsilon(x))} dy G(x, y) f(y) + \int_{B_\varepsilon(x)} dy G(x, y) f(y).$$

Se $y \in B_R(0)$ allora $|x - y| \geq |x| - |y| \geq 2R - R = R$, cosicché possiamo stimare

$$\left| \int_{B_R(0)} dy G(x, y) f(y) \right| \leq \frac{1}{4\pi R} \int_{B_R(0)} dy |f(y)| \leq \frac{1}{R} \|f\|_1 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

D'altra parte, poiché $\int_{B_R(0)} dy |f(y)| \rightarrow \|f\|_1 < \infty$ per $R \rightarrow \infty$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (B_R(0) \cup B_\varepsilon(x))} dy G(x, y) f(y) \right| \leq \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} dy |f(y)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Infine,

$$\left| \int_{B_\varepsilon(x)} dy G(x, y) f(y) \right| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{4\pi} \int_{B_\varepsilon(0)} dz \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2} \|f\|_\infty \varepsilon^2.$$

Nel limite $|x| \rightarrow \infty$ (ovvero $R \rightarrow \infty$) deduciamo che

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |u(x)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty \varepsilon^2 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui, per l'arbitrariet  nella scelta di ε , $u(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$. $\square$

9.10.2. Distribuzioni discontinue. Per descrivere un corpo massivo/carico che occupa una regione dello spazio   naturale considerare distribuzioni f con discontinuit  di prima specie su una superficie limitata e regolare (il bordo del corpo). Una domanda naturale   se il potenziale newtoniano/coulombiano generato dal corpo

$$u(x) = \int dy \frac{1}{4\pi} \frac{f(y)}{|x - y|}$$

  ancora caratterizzabile come soluzione di un problema di Poisson. La risposta   affermativa: ripercorrendo la dimostrazione del teorema precedente sul caso di distribuzioni regolari si deduce facilmente il seguente risultato.

TEOREMA 9.24. *Sia Ω un dominio limitato con frontiera $\partial\Omega = \Sigma$ superficie regolare e sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ con discontinuit  di prima specie su Σ e tale che f e ∇f siano limitate ed integrabili. Allora il potenziale volumetrico*

$$u(x) = \int dy \frac{1}{4\pi} \frac{f(y)}{|x - y|}$$

  l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \\ u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma) \cap C^1(\mathbb{R}^3) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

Mostriamo come applicare questo risultato al calcolo del campo generato da un corpo omogeneo di forma sferica, quindi

$$f(x) = \begin{cases} \varrho & \text{se } |x| \leq R \\ 0 & \text{se } |x| > R \end{cases}$$

con $\varrho \in \mathbb{R}$ e $R > 0$.

Invece di calcolare direttamente l'integrale volumetrico risolviamo il problema di Poisson descritto nel teorema, osservando che per la simmetria del problema la soluzione è radiale, ovvero $u(x) = \tilde{u}(|x|)$.

Per scrivere il problema associato alla funzione incognita $\tilde{u}$ ricordiamo l'espressione (9.14) del laplaciano in coordinate polari (vedi anche soluzione dell'Esercizio 8.6), cosicché che se $\phi(x) = \psi(|x|)$ allora

$$\Delta\phi(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r) \Big|_{r=|x|} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi(r)) \Big|_{r=|x|}$$

Ne segue che $\tilde{u}$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\tilde{u}(r)) + \varrho = 0 & \text{se } r \in (0, R), \\ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\tilde{u}(r)) = 0 & \text{se } r \in (R, +\infty), \\ \tilde{u} \in C^2([0, R) \cup (R, \infty)) \cap C^1([0, \infty)), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{u}(r) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} (r\tilde{u})'' + \varrho r = 0 &\iff \tilde{u}(r) = \frac{C_0}{r} + C_1 - \frac{\varrho r^2}{6} \\ (r\tilde{u})'' = 0 &\iff \tilde{u}(r) = \frac{C_2}{r} + C_3 \end{aligned}$$

La regolarità in $r = 0$ implica $C_0 = 0$ e l'asintotica all'infinito implica $C_3 = 0$. Determiniamo C_1 e C_2 imponendo il raccordo C^1 in $r = R$:

$$\begin{cases} \tilde{u}(R^-) = \tilde{u}(R^+) \\ \tilde{u}'(R^-) = \tilde{u}'(R^+) \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 - \frac{\varrho R^2}{6} = \frac{C_2}{R} \\ -\frac{\varrho R}{3} = -\frac{C_2}{R^2} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{\varrho R^2}{2} \\ C_2 = \frac{\varrho R^3}{3} \end{cases}$$

Quindi, abbreviando $B_R(0) = B_R$,

$$u(x) = \varrho \left(\frac{R^2}{2} - \frac{|x|^2}{6} \right) \chi_{B_R}(x) + \frac{\varrho R^3}{3|x|} \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R}(x)$$

Si osservi che nel caso della forza di gravità, se M è la massa del corpo e G è la costante di gravitazione universale, il potenziale newtoniano è

$$V(x) = \frac{GM}{|B_R|} \int_{B_R} dy \frac{1}{|x-y|} = \frac{3GM}{4\pi R^3} \int_{B_R} dy \frac{1}{|x-y|},$$

dunque $\varrho = 3MG/R^3$ da cui

$$V(x) = \left(\frac{3GM}{2R} - \frac{GM}{2R^3} |x|^2 \right) \chi_{B_R}(x) + \frac{GM}{|x|} \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R}(x).$$

In particolare, un corpo sferico avente densità uniforme e massa M esercita

(i) su una particella all'esterno una forza gravitazionale pari a quella di una particella puntiforme di massa M posta nel suo centro.

(ii) su una particella al suo interno una forza elastica di richiamo verso il centro di costante elastica $K = GM/R^3$.

OSSERVAZIONE 9.5 (momento di dipolo). Se il corpo non è perfettamente sferico ed omogeneo il campo al suo esterno non è pari a quello generato da un punto materiale di uguale massa, ma nel limite di $|x|$ molto grande questa è una buona approssimazione. Supponiamo quindi $\text{supp}(f) \subset B_R(0)$ e $|x| > 2R$, cosicché $\varepsilon = \frac{|y|}{|x|} \leq \frac{1}{2}$. Allora, sviluppando in serie di Taylor fino al prim'ordine,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-y|} &= \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y}} = \frac{1}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|y|^2}{|x|^2} - \frac{2x \cdot y}{|x|^2}}} \\ &= \frac{1}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|}}} = \frac{1}{|x|} \left(1 + \varepsilon \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ &= \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot y}{|x|^3} + \mathcal{R}_1(x, y) \quad \text{con } |\mathcal{R}_1(x, y)| \leq \frac{C_1}{|x|^3} \quad \forall y \in B_R(0). \end{aligned}$$

Dunque

$$u(x) = \int dy \frac{1}{4\pi} \frac{f(y)}{|x-y|} = \frac{M}{|x|} + \frac{Q \cdot x}{|x|^3} + \mathcal{R}(x)$$

con

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4\pi} \int dy f(y) \quad (\text{massa/carica totale}) \\ Q &= \frac{1}{4\pi} \int dy f(y) y \quad (\text{momento di dipolo}) \\ \mathcal{R}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int dy f(y) \mathcal{R}_1(x, y) \implies |\mathcal{R}(x)| \leq \frac{C}{|x|^3} \end{aligned}$$

La denominazione “momento di dipolo” deriva dall'interpretazione della soluzione come potenziale coulombiano. In elettrostatica, un dipolo è un sistema di due cariche elettriche di uguale intensità q e carica opposta, e si definisce momento di dipolo il vettore $\mathbf{d} = q(y_1 - y_2)$, dove y_1 [risp. y_2] è la coordinata della carica positiva [risp. negativa]. Questa situazione corrisponde al limite singolare in cui $f(y) = 4\pi q \delta_{y_1}(y) - 4\pi q \delta_{y_2}(y)$. Si ha allora $M = 0$ e $Q = \mathbf{d}$, cosicché il potenziale elettrostatico generato dal dipolo si scrive

$$u(x) = \frac{\mathbf{d} \cdot x}{|x|^3} + \mathcal{R}(x).$$

9.11. Equazione di Poisson in $\mathbb{R}^2$

In maniera analoga si tratta il caso del potenziale logaritmico generato da una distribuzione di carica f nel piano,

$$u(x) = \int dy G_2(x, y) f(y) = -\frac{1}{2\pi} \int dy \log|x-y| f(y), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Analogamente al caso tridimensionale, $G_2(x, y)$ e $\nabla_x G_2(x, y)$ possiedono una singolarità integrabile in $y = x$. Invece, rispetto al caso tridimensionale, abbiamo ora che $G_2(x, y) \rightarrow \infty$ per $|x - y| \rightarrow \infty$, per cui occorre richiedere condizioni più forti di decadimento di f all'infinito perché u sia ben definita. Inoltre, $u(x)$ non è infinitesima, ma anzi divergente, per $|x| \rightarrow \infty$. Il caso più semplice da trattare è quello in cui la distribuzione di carica f ha supporto compatto.

TEOREMA 9.25. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ a supporto compatto. Allora $u(x)$ è l'unica soluzione classica di $\Delta u + f = 0$ in $\mathbb{R}^2$ tale che il suo comportamento per $|x| \rightarrow \infty$ è il seguente,*

$$u(x) = -\frac{M}{2\pi} \log|x| + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad M = \int dy f(y).$$

DIMOSTRAZIONE. L'unicità della soluzione segue di nuovo dal teorema di Liouville poiché la differenza di due soluzioni con questo comportamento è una funzione armonica infinitesima all'infinito, dunque nulla. Non ripetiamo la prova che $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e che u soddisfa l'equazione, essendo del tutto simile a quella del caso tridimensionale. Mostriamo invece che sussiste l'asintotica dichiarata. Sia $K = \{x: f(x) \neq 0\}$ il supporto di f e sia $R > 0$ tale che $K \subset B_R(0)$. Allora, per $|x| > 2R$,

$$u(x) = -\frac{M}{2\pi} \log|x| + \int_{B_R(0)} dy \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x|}{|x-y|} f(y).$$

Inoltre, per $y \in B_R(0)$, essendo $|x| - R < |x - y| < |x| + R$,

$$\begin{aligned} \log \frac{|x|}{|x-y|} &\leq \log \frac{|x|}{|x|-R} = \log \left(1 + \frac{R}{|x|-R}\right) \leq \frac{R}{|x|-R} \leq \frac{2R}{|x|}, \\ \log \frac{|x|}{|x-y|} &\geq \log \frac{|x|}{|x|+R} = \log \left(1 - \frac{R}{|x|+R}\right) \geq -\frac{R}{|x|+R} \geq -\frac{R}{|x|}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\left| u(x) + \frac{M}{2\pi} \log|x| \right| \leq \frac{2R}{|x|} \int dy |f(y)| = \frac{\text{cost}}{|x|}.$$

□

9.12. Formulazione variazionale del problema di Laplace-Dirichlet

L'esistenza di soluzioni classiche del problema di Poisson-Dirichlet (9.17) su domini qualsiasi non viene trattato in queste note. Vogliamo invece accennare ad un approccio differente al problema, che mediante una formulazione variazionale permette di dimostrare l'esistenza di *soluzioni deboli* del problema. Per fissare le idee consideriamo il caso omogeneo.

L'osservazione chiave è la seguente. Consideriamo una soluzione del problema (9.17) omogeneo ($f = 0$). Poiché è una soluzione stazionaria dell'equazione delle onde, possiamo aspettarci che essa minimizzi l'energia potenziale

$$H(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx |\nabla v|^2,$$

definita sullo spazio $K_g = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v(x) = g(x) \ \forall x \in \partial\Omega\}$. In effetti, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ è soluzione del problema (9.17) con $f = 0$ e se $v = u + h$ con $h \in K_0$ allora

$$\begin{aligned} H(v) - H(u) &= \int_{\Omega} dx \nabla u \cdot \nabla h + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx |\nabla h|^2 \\ &= \int_{\partial\Omega} d\sigma h \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} dx h \Delta u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx |\nabla h|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx |\nabla h|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

avendo usato nell'ultima uguaglianza che h è nulla sulla frontiera di Ω e che u è armonica in Ω . Quindi possiamo cercare u come soluzione del problema variazionale

$$u = \operatorname{argmin}_{v \in K_g} H(v).$$

In effetti, se tale u esiste allora

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} H(u + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} dx \nabla u \cdot \nabla h = 0 \quad \forall h \in K_0,$$

da cui, se anche $u \in C^2(\Omega)$, integrando per parti,

$$\int_{\Omega} dx h \Delta u = 0 \quad \forall h \in K_0,$$

e pertanto $\Delta u = 0$ in Ω per il lemma fondamentale del calcolo della variazioni.

In verità sappiamo solo che $H \geq 0$, per cui esiste $m \geq 0$ tale che

$$m = \inf_{v \in K_g} H(v) \implies \exists \{u_k\} \subset K_g : \lim_{k \rightarrow \infty} H(u_k) = m.$$

La strategia è allora quella di considerare uno spazio di funzioni più grande, $\tilde{K}_g \supset K_g$, tale che la sequenza $\{u_k\}$ è ivi compatta, ovvero si possa estrarre una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}$ convergente, diciamo $u_{k_j} \rightarrow u \in \tilde{K}_g$ per $j \rightarrow \infty$. Se il funzionale $H(v)$ è semicontinuo inferiormente nella topologia di $\tilde{K}_g$ allora $m = H(u)$. Ma se anche tutto questo riesce, poiché sappiamo solo che $u \in \tilde{K}_g$, tale funzione potrebbe non essere due volte differenziabile e quindi definire solo una “soluzione debole” del problema. La parte successiva è allora dimostrare che (sotto opportune ipotesi sui dati al bordo e sul dominio) tale funzione è effettivamente regolare.

9.13. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 9.1. L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$u(x) = C_1 + C_2 x + \int_0^x dy y f(y) - x \int_0^x dy f(y).$$

Affinché $u(0) = 0$ ed $u(x)$ sia uniformemente limitata è necessario e sufficiente che

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \int_0^\infty dy f(y).$$

Infatti la necessità di tale scelta è ovvia, mentre per la sufficienza osserviamo che per tale scelta di C_2 si ha

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} \left| C_2 x - x \int_0^x dy f(y) \right| &\leq \sup_{x \geq 0} x \int_x^\infty dy |f(y)| \leq \sup_{x \geq 0} \int_x^\infty dy y |f(y)| \\ &\leq \int_0^\infty dy y |f(y)| < \infty. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione del problema è

$$u(x) = \int_0^x dy y f(y) + x \int_x^\infty dy f(y) = \int_0^\infty dy G(x, y) f(y),$$

con

$$G(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x < y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}.$$

Chiaramente $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) + \delta_y(x) = 0$, $G(0, y) = 0$, $G(\infty, y) = y$. Infine,

$$u(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \int_0^\infty dy y f(y),$$

poiché $x \int_x^\infty dy f(y)$ è dominato in modulo dalla coda $\int_x^\infty dy y |f(y)|$, che tende a zero per $x \rightarrow \infty$ essendo l'integrale $\int_0^\infty dy y |f(y)|$ convergente per ipotesi.

SOLUZIONE ES. 9.4. Vogliamo esplicitare le identità delle parti reale ed immaginaria della formula integrale di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

dove $\gamma = \partial\Omega$ è una curva semplice, frontiera dell'aperto Ω del piano complesso $\mathbb{C}$ contenuto nel dominio di analiticità di f . Posto $z = x_1 + ix_2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $f = u + iv$, si ha

$$\begin{aligned} u(x) + iv(x) &= \frac{-i}{2\pi} \oint_\gamma (d\xi_1 + i d\xi_2) \frac{u + iv}{|\xi - x|^2} [\xi_1 - x_1 - i(\xi_2 - x_2)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma (d\xi_2 - i d\xi_1) \frac{(\xi_1 - x_1)u + (\xi_2 - x_2)v + i[(\xi_1 - x_1)v - (\xi_2 - x_2)u]}{|\xi - x|^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{[(\xi_1 - x_1)u + (\xi_2 - x_2)v] d\xi_2 + [(\xi_1 - x_1)v - (\xi_2 - x_2)u] d\xi_1}{|\xi - x|^2} \\ v(x) &= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{[(\xi_1 - x_1)v - (\xi_2 - x_2)u] d\xi_2 - [(\xi_1 - x_1)u + (\xi_2 - x_2)v] d\xi_1}{|\xi - x|^2} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, detta $\tau(\xi)$ la tangente a γ (verso antiorario), $\nu(\xi)$ la normale esterna a Ω e $d\sigma(\xi)$ l'elemento di arco di curva, si ha:

$$\tau(\xi) d\sigma(\xi) = \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \nu(\xi) d\sigma(\xi) = \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} d\xi_2 \\ -d\xi_1 \end{pmatrix}$$

cosicch 

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) u(\xi) \frac{\xi - x}{|\xi - x|^2} \cdot \nu(\xi) + \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) v(\xi) \frac{\xi - x}{|\xi - x|^2} \cdot \tau(\xi) \\ v(x) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) v(\xi) \frac{\xi - x}{|\xi - x|^2} \cdot \nu(\xi) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) u(\xi) \frac{\xi - x}{|\xi - x|^2} \cdot \tau(\xi) \end{aligned}$$

Dunque, essendo $G_2(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - \xi|$,

$$\begin{aligned} u(x) &= -\oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \nu}(x, \xi) u(\xi) - \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) v(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \tau}(x, \xi) \\ v(x) &= -\oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \nu}(x, \xi) v(\xi) + \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) u(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \tau}(x, \xi) \end{aligned}$$

Integrando per parti nel secondo integrale di ciascuna identità si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) &= -\oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \nu}(x, \xi) u(\xi) + \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi) G_2(x, \xi) \\ v(x) &= -\oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \nu}(x, \xi) v(\xi) - \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi) G_2(x, \xi) \end{aligned}$$

Infine, per le equazioni di Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} \nabla u &= (\nabla v)^{\perp}, \quad \nabla v = -(\nabla u)^{\perp}, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi) &= \nabla v(\xi) \cdot \tau(\xi) = -(\nabla u(\xi))^{\perp} \cdot \tau(\xi) = \nabla u(\xi) \cdot \nu(\xi) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \\ \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi) &= \nabla u(\xi) \cdot \tau(\xi) = (\nabla v(\xi))^{\perp} \cdot \tau(\xi) = -\nabla v(\xi) \cdot \nu(\xi) = -\frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi) \end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned} u(x) &= -\oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \nu}(x, \xi) u(\xi) + \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) G_2(x, \xi) \\ v(x) &= -\oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial G_2}{\partial \nu}(x, \xi) v(\xi) + \oint_{\gamma} d\sigma(\xi) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi) G_2(x, \xi) \end{aligned}$$

che sono le rappresentazioni integrali delle funzioni armoniche u e v .

SOLUZIONE ES. 9.5. Cerchiamo la funzione armonica nella forma di un polinomio di secondo grado nelle variabili $x = (x_1, x_2)$, dunque

$$u(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_1 x_2 + \delta x_1 + \epsilon x_2 + c.$$

Imponendo la condizione di armonicit  $\Delta u = 0$ si ricava che deve essere $\alpha + \beta = 0$, per cui

$$u(x) = \alpha(x_1^2 - x_2^2) + \gamma x_1 x_2 + \delta x_1 + \epsilon x_2 + c.$$

Imponendo ora le condizioni al bordo devono essere verificate le ulteriori relazioni,

$$\alpha x_1^2 + \delta x_1 + c = x_1, \quad \gamma x_1^2 + (\delta + \epsilon)x_1 + c = x_1^2 + 2x_1,$$

che implicano $\alpha = 0$, $\delta = 1$, $c = 0$, $\gamma = 1$, $\delta + \epsilon = 2$. La funzione cercata   quindi $u(x) = x_1 x_2 + x_1 + x_2$.

SOLUZIONE ES. 9.6. Per il principio del massimo la funzione u è positiva in Ω , in particolare $u > 0$ in ∂B . D'altra parte, la funzione $w = u - v$ è armonica in Ω_B con $w = u$ in ∂B e $w = 0$ in $\partial\Omega$. Dunque $w \geq 0$ in tutto $\partial\Omega_B$, da cui, per il principio del massimo, $w \geq 0$ in Ω_B , ovvero $u \geq v$ in tale dominio.

SOLUZIONE ES. 9.8. Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} U_n(r, \theta)$$

con

$$U_0(r, \theta) = C_0 + D_0 \log r,$$

$$U_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad n \geq 1$$

La condizione sul comportamento per $r \rightarrow 0^+$ implica che deve aversi

$$D_0 = 2, \quad D_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

La condizione sul bordo $r = 1$ diventa allora (ridefinendo le costanti $C_n A_n \rightarrow A_n$, $C_n B_n \rightarrow B_n$)

$$C_0 + \sum_{n \geq 1} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \sin 5\theta$$

da cui $C_0 = 0$, $A_5 = 1$ e tutti gli altro coefficienti nulli. Pertanto

$$u(r, \theta) = 2 \log r + r^5 \sin 5\theta.$$

SOLUZIONE ES. 9.9. Consideriamo la formula di Poisson per il disco $B_1(0)$,

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|x - y|^2}$$

e supponiamo che il dato al bordo g sia una funzione antisimmetrica rispetto all'asse delle ascisse, ovvero $g(Sy) = -g(y)$ dove $Sy = (y_1, -y_2)$ per $y = (y_1, y_2)$. Allora, con la sostituzione $y = Sy'$,

$$\begin{aligned} u(Sx) &= \frac{1 - |Sx|^2}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|Sx - y|^2} \\ &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} d\sigma(Sy') \frac{g(Sy')}{|S(x - y')|^2} \\ &= \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} d\sigma(y') \frac{-g(y')}{|x - y'|^2} = -u(x). \end{aligned}$$

avendo usato che $|Sz| = |z|$ e $d\sigma(Sy') = d\sigma(y')$. Dunque anche u è antisimmetrica rispetto all'asse delle ascisse, in particolare $u(x_1, 0) = 0$ per $|x_1| \leq 1$. Se scegliamo allora

$$g(x) = \begin{cases} 1 - e^{x_2} & \text{se } |x| = 1, \ x_2 > 0, \\ -1 + e^{-x_2} & \text{se } |x| = 1, \ x_2 \leq 0, \end{cases}$$

la funzione cercata è la restrizione di u al semi-disco $B_1^+(0)$.

SOLUZIONE ES. 9.10. Sia $a > 0$ sufficientemente grande perché $\Omega \subset B_a(0)$ e $|u(x)| \leq 1$ se $|x| = a$. Posto allora $w_{\pm}(x) = u(x) \pm \frac{a}{|x|}$ si ha

$$w_+(x) \geq 0, \quad w_-(x) \leq 0 \quad \text{se } |x| = a.$$

D'altra parte, poiché $w_{\pm}(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, per ogni $R > a$ si ha

$$w_+(x) \geq -\varepsilon_R, \quad w_-(x) \leq \varepsilon_R \quad \text{se } |x| = R,$$

con $\varepsilon_R > 0$ ed infinitesimo per $R \rightarrow \infty$. Ne segue, per il principio del massimo applicato alle funzioni armoniche $w_{\pm}$ nel dominio $\{x \in \mathbb{R}^3 : a < |x| < R\}$, che

$$w_+(x) \geq -\varepsilon_R, \quad w_-(x) \leq \varepsilon_R \quad \text{se } a \leq |x| \leq R,$$

ovvero, vista l'arbitrarietà nella scelta di $R > a$,

$$w_+(x) \geq 0, \quad w_-(x) \leq 0 \quad \text{se } |x| \geq a,$$

ovvero, per la definizione di $w_{\pm}$,

$$-\frac{a}{|x|} \leq u(x) \leq \frac{a}{|x|} \quad \text{se } |x| \geq a.$$

SOLUZIONE ES. 9.11. Utilizziamo le coordinate polari (r, θ) e cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} U_n(r, \theta)$$

con

$$U_0(r, \theta) = C_0 + D_0 \log r,$$

$$U_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad n \geq 1$$

Notiamo che se $|x| = 2$ allora

$$x_1 x_2 + 2x_2 = 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin \theta = 2 \sin 2\theta + 4 \sin \theta.$$

Quindi le condizioni al bordo si scrivono:

$$u(1, \theta) = C_0 + \sum_{n \geq 1} (C_n + D_n)(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = 0,$$

$$\begin{aligned} u(2, \theta) &= C_0 + D_0 \log 2 + \sum_{n \geq 1} (C_n 2^n + D_n 2^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &= 2 \sin 2\theta + 4 \sin \theta. \end{aligned}$$

Dalla prima segue che $C_0 = 0$ e $D_n = -C_n$ per ogni $n \geq 1$. Inserite nella seconda si ottiene

$$D_0 \log 2 + \sum_{n \geq 1} C_n (2^n - 2^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = 2 \sin 2\theta + 4 \sin \theta,$$

da cui $D_0 = 0$, $A_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $\frac{3}{2}C_1 B_1 = 4$, $\frac{15}{4}C_2 B_2 = 2$ e $B_n = 0$ per ogni $n \neq 1, 2$.

In conclusione, la soluzione è

$$u(r, \theta) = \frac{8}{3}(r - r^{-1}) \sin \theta + \frac{8}{15}(r^2 - r^{-2}) \sin 2\theta$$

ovvero, espressa in coordinate cartesiane,

$$u(x) = \frac{8}{3}x_2 \left(1 - \frac{1}{|x|^2}\right) + \frac{16}{15}x_1x_2 \left(1 - \frac{1}{|x|^4}\right)$$

SOLUZIONE ES. 9.12. Procediamo come nei casi precedenti e cerchiamo la soluzione in coordinate polari (r, θ) nella forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} U_n(r, \theta)$$

con

$$U_0(r, \theta) = C_0 + D_0 \log r,$$

$$U_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad n \geq 1$$

La richiesta $u(r, \theta) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$ impone $D_0 = 0$ e $C_n = 0$ per ogni $n \geq 0$.
Dunque

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 1} D_n r^{-n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Calcoliamo il dato sul bordo in coordinate angolari: se $|x| = 2$ allora

$$x_1x_2 + x_2^2 - 2 = 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \sin^2 \theta - 2 = 2 \sin 2\theta - 2 \cos 2\theta.$$

Possiamo ora imporre la condizione sul bordo

$$u(2, \theta) = \sum_{n \geq 1} D_n 2^{-n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = 2 \sin 2\theta - 2 \cos 2\theta,$$

che sono soddisfatte scegliendo $A_2 D_2 = -8$, $B_2 D_2 = 8$ e $D_n = 0$ per $n \neq 2$.

In conclusione

$$u(r, \theta) = \frac{8(\sin 2\theta - \cos 2\theta)}{r^2} \iff u(x) = \frac{16(x_1x_2 + x_2^2 - 2)}{|x|^4}.$$

SOLUZIONE ES. 9.13. Dobbiamo imporre che $\mathcal{G}(x, y) = 0$ se $|x| = R$ qualsiasi sia $y \in B_R(0)$, dunque

$$\frac{1}{2\pi} \log |x - y| = \frac{1}{2\pi} \log(q|x - \bar{y}|)$$

da cui

$$|x - y|^2 = q^2 |x - \bar{y}|^2 \iff 2x \cdot (q^2 \bar{y} - y) = (q^2 - 1)R^2 + q^2 |\bar{y}|^2 - |y|^2$$

Procediamo come nel caso tridimensionale: poiché il membro di destra non dipende dall'angolo tra le direzioni dei vettori coinvolti scegliamo

$$\bar{y} = \frac{y}{q^2} \implies (q^2 - 1)(R^2 q^2 - |y|^2) = 0$$

e quindi, per avere $\bar{y} \notin B_R(0)$, $q = |y|/R$. In definitiva

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \log |x - y| + \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{|y|}{R} \left| x - \frac{R^2 y}{|y|^2} \right| \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log \frac{R|y||x - y|}{||y|^2 x - R^2 y|}. \end{aligned}$$

Si ritrova infine la formula di Poisson sfruttando il fatto che la soluzione del problema di Laplace-Dirichlet si scrive

$$u(x) = - \int_{B_R(0)} d\sigma(y) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(x, y) g(y)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(x, y) \Big|_{|y|=R} &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{|x|^2 + r^2 - 2|x|r \cos \theta} \right]_{r=R} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \log \left(\frac{r}{R} \sqrt{|x|^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2 \frac{R^2|x| \cos \theta}{r}} \right) \right]_{r=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \log(|x|^2 + r^2 - 2|x|r \cos \theta) \right]_{r=R} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \log \left(\frac{|x|^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2|x|r \cos \theta \right) \right]_{r=R}. \end{aligned}$$

Sviluppando le derivate si trova

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}(x, y) \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x|^2 + r^2 - 2|x|r \cos \theta} = \frac{1}{2\pi R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^2}$$

da cui la formula di Poisson

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{B_R(0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|x - y|^2}.$$

SOLUZIONE ES. 9.14. Non è necessario conoscere la soluzione dell'Esercizio 9.13. Infatti la forzante è invariante per rotazioni che sono quindi una simmetria dell'equazione. Essendo il dato al bordo invariante per rotazioni allora anche la soluzione u è invariante, ovvero $u(x) = \tilde{u}(|x|)$. Sfruttando l'espressione (9.14) del laplaciano in coordinate polari dunque l'equazione $\Delta u + |x|^4 = 0$ formulata nell'incognita $\tilde{u}$ si scrive

$$\begin{aligned} \tilde{u}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{u}'(r) + r^4 &= 0 \iff (r \tilde{u}')'(r) + r^5 = 0 \\ \iff \tilde{u}'(r) &= \frac{C_1}{r} - \frac{r^5}{6} \iff \tilde{u}(r) = C_0 + C_1 \log r - \frac{r^6}{36} \end{aligned}$$

Poiché cerchiamo una funzione armonica in tutto il disco deve essere $C_1 = 0$, dopodiché imponiamo la condizione al bordo:

$$\tilde{u}(1) = C_0 - \frac{1}{36} = 0 \implies C_0 = \frac{1}{36}.$$

Quindi

$$u(x) = \frac{1 - |x|^6}{36}.$$

Equazione del calore

10.1. Considerazioni generali

In questo capitolo studiamo un'altra delle equazioni fondamentali della fisica matematica, l'equazione del calore o *equazione della diffusione*,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D\Delta u(x, t),$$

per la funzione incognita $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}_+$, con $d = 1, 2, 3$ e $D > 0$ una costante assegnata, detta *coefficiente di diffusione*. Il nome di equazione del calore proviene dal fatto che essa fu introdotta per la prima volta nella descrizione della propagazione del calore in un mezzo solido, isotropo ed omogeneo. In realtà tale equazione (e sue generalizzazioni) descrive un'ampia classe di fenomeni fisici e biologici noti come *processi di diffusione*. Un esempio tipico, già discusso in Sezione 1.3, è il trasporto di materia in un mezzo dovuto al moto molecolare disordinato del mezzo in cui essa si trova. Vedremo più avanti una derivazione microscopica e probabilistica di tale equazione, che renderà più chiaro il tipo di dinamica microscopica che può dar luogo ad un'equazione di evoluzione macroscopica di tipo diffusivo.

Nonostante le diverse analogie tra l'equazione delle onde e quella della diffusione, quest'ultima si differenzia notevolmente dalla prima, in particolare riguardo il comportamento asintotico nel tempo delle soluzioni, ed in effetti descrive fenomeni evolutivi profondamente diversi. In particolare notiamo che come l'equazione delle onde essa è lineare, pertanto sussiste il principio di sovrapposizione, ed è anch'essa invariante rispetto a traslazioni spazio-temporali. Viceversa, non è invariante sotto riflessioni del tempo: se $u(x, t)$ risolve l'equazione del calore allora la funzione $v(x, t) = u(x, -t)$ è soluzione dell'equazione *aggiunta* $\frac{\partial v}{\partial t} + D\Delta v = 0$. In altri termini, esiste una direzione privilegiata del tempo, questa equazione descrive fenomeni *irreversibili*.

10.2. Derivazione euristica

Consideriamo un solido omogeneo ed isotropo di densità ρ costante. Su di esso non si compie lavoro meccanico, ma assumiamo che possa scambiare energia termica con una sorgente esterna in modo distribuito sulla sua estensione (ad esempio per irraggiamento, o per energia rilasciata da reazioni chimiche al suo interno). Sia $r = r(x, t)$ il tasso di calore scambiato per unità di massa con

tale sorgente. Assumendo che ciascun elemento di volume infinitesimo sia all'equilibrio termico locale, l'energia interna per unità di massa in un volumetto attorno x al tempo t è una funzione $e = e(x, t)$, proporzionale alla temperatura assoluta $\theta(x, t)$ nello stesso elemento; la costante di proporzionalità, detta calore specifico a volume costante ed indicata con C_v , è assunta indipendente dalla posizione e dal tempo, cosicché

$$e(x, t) = C_v \theta(x, t).$$

Per il primo principio della termodinamica, poiché non si compie lavoro sul solido, la variazione di energia interna in un qualunque suo volume V è pari al flusso di calore che attraversa la frontiera ∂V sommato al calore scambiato in V con la sorgente esterna. Pertanto, indicando con $J = J(x, t) \in \mathbb{R}^3$ il flusso di calore, deve aversi

$$\frac{d}{dt} \int_V dx \rho e = - \int_{\partial V} d\sigma J \cdot \nu + \int_V dx \rho r.$$

Possiamo ora ragionare come fatto in Sezione 1.3: poiché $\int_{\partial V} d\sigma J \cdot \nu = \int_V dx \operatorname{div} J$, la precedente equazione si riscrive nella forma

$$\int_V dx \left(\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} J - \rho r \right) = 0 \quad \forall V,$$

da cui

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div} J(x, t) = \rho r(x, t),$$

ovvero,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{\rho C_v} \operatorname{div} J(x, t) = f(x, t) \quad \left(\text{con } f(x, t) = \frac{r(x, t)}{C_v} \right).$$

Per ottenere un'equazione chiusa nel campo di temperatura θ occorre postulare una legge che metta in relazione il flusso di calore con la stessa temperatura. Assumiamo allora la *legge di Fourier*, del tutto analoga alla legge di Fick (1.3), che si dimostra essere valida in condizioni "normali" (quali ad esempio gradienti non troppo elevati di temperatura). Tale legge stabilisce che esiste una costante $K > 0$, detta *conducibilità termica*, che dipende unicamente dal materiale in esame, tale che

$$J(x, t) = -K \nabla \theta(x, t).$$

Sostituendo nell'equazione di bilancio energetico sopra derivata otteniamo infine l'equazione del calore in presenza di una sorgente f ,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = D \Delta \theta(x, t) + f(x, t) \quad \left(\text{con } D = \frac{K}{\rho C_v} \right).$$

Vale la pena osservare che se il solido considerato non è omogeneo, il calore specifico C_v e la conducibilità termica K dipendono dalla posizione x , nel qual caso l'equazione di diffusione del calore assume la seguente forma più generale,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\rho C_v(x)} \operatorname{div} [K(x) \nabla \theta(x, t)] + f(x, t),$$

dove, in caso di anisotropia del solido, la conducibilità $K(x)$ è una matrice $d \times d$.

OSSERVAZIONE 10.1. Anche nel caso della diffusione di una sostanza in un mezzo discusso in Sezione 1.3, possiamo considerare la versione non omogenea dell'equazione per la concentrazione $c(x, t)$, ovvero

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = D\Delta c(x, t) + f(x, t).$$

In questo caso f rappresenta un termine di sorgente della sostanza stessa (ad esempio se essa viene creata nel mezzo attraverso qualche reazione chimica).

Nei casi più generali D può dipendere anche da x e c , mentre f può dipendere anche da c, x, t , il che conduce ad una particolare EDP non lineare, detta equazione di *reazione-diffusione*,

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = \operatorname{div}[D(c(x, t), x)\nabla c(x, t)] + f(x, c(x, t), t).$$

Ad esempio, se $c(x, t) = n(x, t)$ indica la concentrazione di una popolazione con *crescita logistica* $f = rn(1 - \frac{1}{k}n)$, dove r è detto il tasso lineare di riproduzione e k la capacità dell'habitat, si ottiene l'*equazione di Fisher-KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov)*:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = D\Delta n(x, t) + rn(x, t) - \frac{r}{k}n(x, t)^2.$$

10.3. Problemi ben posti e principio del massimo

Osserviamo innanzitutto che, a differenza dell'equazione delle onde, essendo quella del calore del primo ordine rispetto alla variabile t , è necessario assegnare solo il valore della funzione u al tempo $t = 0$ per fissare le condizioni iniziali del moto. In presenza di un dominio limitato con frontiera, possiamo considerare sia le condizioni al bordo di Dirichlet che di Neumann: nel linguaggio del calore, questo significa, rispettivamente, assegnare una temperatura prestabilita sul bordo, ovvero assegnare il flusso di calore attraverso il bordo (chiaramente hanno senso anche altre condizioni al bordo, ma ci limitiamo in queste note a trattare solo le precedenti). Prenderemo in esame quindi i seguenti problemi.

- (1) *Problema di Cauchy globale*. La funzione incognita $u = u(x, t)$ è definita su tutto lo spazio, pertanto il problema corrispondente è

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (10.1)$$

- (2) *Problema di Cauchy-Dirichlet*. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio regolare limitato con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 . La funzione incognita $u = u(x, t)$ è soluzione dell'equazione del calore su $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ed il suo valore $a(x, t)$ sulla frontiera di Ω è preassegnato. Il problema corrispondente

è pertanto

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f & \text{in } Q_T, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega}, \\ u(x, t) = a(x, t) & \text{per } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (10.2)$$

- (3) *Problema di Cauchy-Neumann.* Come in (2), con la differenza che viene assegnato il valore $b(x, t)$ della derivata normale della funzione incognita sulla frontiera di Ω . Otteniamo così il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f & \text{in } Q_T, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = b(x, t) & \text{per } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (10.3)$$

Dimostreremo l'unicità e, in alcuni casi, l'esistenza della soluzione di questi problemi. Vale la pena sin d'ora rimarcare una differenza di fondo con il caso della propagazione ondosa. Definiamo *frontiera parabolica* di Q_T l'insieme

$$\begin{aligned} \partial_p Q_T &:= (\overline{\Omega} \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]) \\ &= \{(x, t) : x \in \overline{\Omega}, t = 0\} \cup \{(x, t) : x \in \partial\Omega, t \in [0, T]\}. \end{aligned}$$

Osserviamo allora che la buona posizione dei problemi (10.2) e (10.3) significa che la conoscenza di $u(x, t)$ sulla frontiera parabolica determina univocamente $u(x, t)$ in tutto $\overline{Q_T}$. Invece, nel caso dell'equazione delle onde, poiché l'assegnazione della velocità iniziale $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ può sostituirsi con il valore $u(x, T)$ (si pensi alla formulazione variazionale), la soluzione rimane determinata in tutto $\overline{Q_T}$ solo se è nota su tutta la frontiera ∂Q_T di Q_T . Questa differenza è legata all'irreversibilità dei processi descritti dall'equazione del calore: il futuro rimane determinato dal passato (il principio di causalità rimane pertanto valido) ma non è vero il viceversa, ovvero il valore della soluzione u al tempo t non determina il suo valore ai tempi precedenti.

Analogamente, nel problema globale (10.1) definiamo la frontiera parabolica

$$\partial_p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}^d \times \{t = 0\} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : t = 0\}$$

e la conoscenza di $u(x, t)$ su tale insieme determina univocamente la soluzione su tutto $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

I teoremi di unicità per l'equazione del calore sono basati su una proprietà fondamentale delle soluzioni, nota come *principio del massimo parabolico*, che è conseguenza delle leggi di Fourier/Fick per le quali il calore/sostanza fluisce sempre verso regioni a temperatura/concentrazione più bassa. Formuleremo questo principio e le sue conseguenze dapprima nel caso di un dominio limitato.

In quanto segue $C^{2,1}(Q_T)$ indica l'insieme delle funzioni numeriche su Q_T che sono differenziabili con continuità due volte rispetto al complesso delle variabili $x = (x_1, \dots, x_d)$ ed una volta rispetto alla variabile temporale t . Inoltre

$C(\overline{Q_T})$ [risp. $C^1(\overline{Q_T})$] denota l'insieme delle funzioni numeriche su Q_T continue [risp. derivabili con continuità] fino alla frontiera.

TEOREMA 10.1 (Principio del massimo). *Sia $w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ tale che*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w \leq 0 \quad \text{in } Q_T, \quad (10.4)$$

con D una costante positiva. Allora il massimo di w è assunto sulla frontiera parabolica, ovvero

$$\max_{\overline{Q_T}} w = \max_{\partial_p Q_T} w.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la continuità fino alla frontiera della funzione w è sufficiente dimostrare che

$$\max_{\overline{Q_{T'}}} w = \max_{\partial_p Q_{T'}} w \quad \forall T' \in (0, T).$$

Fissiamo quindi $T' < T$ e ragioniamo per assurdo, assumendo che

$$M := \max_{\overline{Q_{T'}}} w > \max_{\partial_p Q_{T'}} w =: m.$$

Scelto $0 < \varepsilon < \frac{M-m}{T'}$, poniamo $u(x, t) := w(x, t) + \varepsilon(T' - t)$. Per la scelta fatta del parametro ε si ha

$$m_u := \max_{\partial_p Q_{T'}} u \leq m + \varepsilon T' < M.$$

D'altra parte, poiché $u \geq w$ (su $\overline{Q_{T'}}$),

$$M_u := \max_{\overline{Q_{T'}}} u \geq M.$$

Dunque $M_u > m_u$, il che implica l'esistenza di un punto $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T']$ tale che $M_u = u(x_0, t_0)$. Mostriamo che questo conduce ad un assurdo. Infatti, la condizione di massimo implica che

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) &= 0 & \text{se } 0 < t_0 < T', \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) &\geq 0 & \text{se } t_0 = T', \end{aligned} \right\}$$

mentre, essendo x_0 interno ad Ω , $\nabla u(x_0, t_0) = 0$ e $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$. Ne segue che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) - D\Delta u(x_0, t_0) \geq 0,$$

che contraddice l'ipotesi (10.4), poiché in ogni punto $(x, t) \in \Omega \times (0, T']$ si ha

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - D\Delta u(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - D\Delta w(x, t) - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0.$$

□

COROLLARIO 10.2. *Sia $w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ tale che*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w \geq 0 \quad \text{in } Q_T,$$

con D una costante positiva. Allora il minimo di w è assunto sulla frontiera parabolica, ovvero

$$\min_{\overline{Q_T}} w = \min_{\partial_p Q_T} w.$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente applicare il Teorema 10.1 alla funzione $-w$. $\square$

PROPOSIZIONE 10.3. Sia $w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ soluzione dell'equazione del calore omogenea,

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w = 0 \quad \text{in } Q_T.$$

Allora

$$\min_{\partial_p Q_T} w \leq w(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} w \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

DIMOSTRAZIONE. Ovvio conseguenza del Teorema 10.1 e del Corollario 10.2. $\square$

Osserviamo che la precedente proposizione implica che se w ha un segno definito sulla frontiera parabolica allora w possiede il medesimo segno su tutto il dominio $\overline{Q_T}$.

TEOREMA 10.4. Siano $u_1, u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ soluzioni dell'equazione del calore con uguale coefficiente di diffusione e forzanti $f_1, f_2 \in C(\overline{Q_T})$ rispettivamente. Allora sussiste la seguente stima,

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u_1 - u_2| + T \max_{\overline{Q_T}} |f_1 - f_2|. \quad (10.5)$$

In particolare, il problema di Cauchy-Dirichlet (10.2) possiede al più una soluzione in $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$.

DIMOSTRAZIONE. Posto

$$M := \max_{\overline{Q_T}} |f_1 - f_2|$$

definiamo

$$u_{\pm}(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t) \pm Mt,$$

cosicch 

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial t}(x, t) - D\Delta u_{\pm}(x, t) = f_1(x, t) - f_2(x, t) \pm M.$$

Pertanto, dalla definizione di M ,

$$\frac{\partial u_-}{\partial t} - D\Delta u_- \leq 0, \quad \frac{\partial u_+}{\partial t} - D\Delta u_+ \geq 0 \quad \text{in } Q_T.$$

Possiamo allora applicare, rispettivamente, il Teorema 10.1 alla funzione u_- ed il Corollario 10.2 alla funzione u_+ . Si ottiene in tal modo che

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q_T}} (u_1 - u_2 - Mt) &= \max_{\partial_p Q_T} (u_1 - u_2 - Mt), \\ \min_{\overline{Q_T}} (u_1 - u_2 + Mt) &= \min_{\partial_p Q_T} (u_1 - u_2 + Mt). \end{aligned}$$

Dalle precedenti disuguaglianze segue che, per ogni $(x, t) \in \overline{Q_T}$,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) - u_2(x, t) - Mt &\leq \max_{\partial_p Q_T} (u_1 - u_2) \leq \max_{\partial_p Q_T} |u_1 - u_2|, \\ u_1(x, t) - u_2(x, t) + Mt &\geq \min_{\partial_p Q_T} (u_1 - u_2) \geq -\max_{\partial_p Q_T} |u_1 - u_2|, \end{aligned}$$

che equivalgono a

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u_1 - u_2| + Mt,$$

da cui la tesi (10.5). L'unicità del problema di Cauchy-Dirichlet è ovvia conseguenza della stima (10.5). $\square$

OSSERVAZIONE 10.2. L'unicità del problema di Cauchy-Neumann 10.3 può essere provata con questi criteri di confronto, purché si dimostri una versione più forte del principio del massimo, assieme ad un'altra proprietà delle soluzioni nota come Principio di Hopf. Non tratteremo tali risultati in queste note. Osserviamo però che un risultato di unicità per entrambi i problemi di Dirichlet e di Neumann nella classe delle funzioni differenziabili fino al bordo di Q_T può essere facilmente ottenuto con il seguente metodo dell'energia. Assegnata $w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T})$ soluzione dell'equazione del calore omogenea in Q_T , calcoliamo la derivata temporale della funzione

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx w(x, t)^2, \quad t \in [0, T].$$

Si ha, applicando la I Formula di Green,

$$\dot{E}(t) = \int_{\Omega} dx w \frac{\partial w}{\partial t} = \int_{\Omega} dx Dw \Delta w = D \int_{\partial\Omega} d\sigma w \frac{\partial w}{\partial \nu} - D \int_{\Omega} dx |\nabla w|^2.$$

Se ora u_1 e u_2 sono due soluzioni del medesimo problema (10.2) o (10.3) nella classe $C^{2,1}(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T})$, allora la loro differenza $w = u_1 - u_2$ è soluzione del problema omogeneo con $w \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ su $\partial_p Q_T$. Pertanto $\dot{E}(t) \leq 0$ per ogni $t \in [0, T]$ e dunque, essendo $E(0) = 0$ ed $E(t) \geq 0$, si ha $E(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Ne segue che per ogni $t \in [0, T]$ si ha $w(x, t) = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$. D'altra parte $w \in C(\overline{Q_T})$ per cui deve essere $w = 0$ su $\overline{Q_T}$, ovvero $u_1 = u_2$.

Consideriamo ora il problema di Cauchy globale (10.1), di cui dimostreremo l'unicità nella classe delle funzioni limitate utilizzando la seguente estensione del principio del massimo.

TEOREMA 10.5 (Principio del massimo globale). *Consideriamo una funzione $w \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ tale che*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w \leq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, T), \quad (10.6)$$

con D una costante positiva. Supponiamo inoltre che esista $C < +\infty$ per cui

$$w \leq C \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times [0, T].$$

Allora

$$\sup_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} w = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} w(x, 0).$$

DIMOSTRAZIONE. Posto

$$M_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} w(x, 0), \quad C_1 := C - M_0,$$

definiamo, per ogni $L > 0$,

$$z(x, t) := \frac{2dC_1}{L^2} \left(\frac{x^2}{2d} + Dt \right) + M_0.$$

Poiché $\Delta x^2 = \sum_{i=1}^d \frac{\partial x^2}{\partial x_i^2} = 2d$ si ha $\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) - D\Delta z(x, t) = 0$. Pertanto dall'ipotesi (10.6) segue che

$$\frac{\partial(z-w)}{\partial t} - D\Delta(z-w) \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, T).$$

Applichiamo il Corollario 10.2 alla funzione $z - w$, scegliendo come dominio la bolla $\Omega_L := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < L\}$. Posto $Q_{T,L} := \Omega_L \times (0, T)$, otteniamo

$$\min_{\overline{Q_{T,L}}} (z-w) = \min_{\partial_p Q_{T,L}} (z-w) = \min \left\{ \min_{\Omega_L \times \{t=0\}} (z-w); \min_{\partial\Omega_L \times [0, T]} (z-w) \right\}.$$

Essendo $C_1 \geq 0$ ed $M_0 \geq w(x, 0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, si ha

$$\min_{\Omega_L \times \{t=0\}} (z-w) = \min_{|x| \leq L} \left[\frac{C_1 x^2}{L^2} + M_0 - w(x, 0) \right] \geq 0.$$

D'altra parte, essendo $C_1 + M_0 - w(x, t) = C - w(x, t) \geq 0$ per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$, si ha anche

$$\begin{aligned} \min_{\partial\Omega_L \times [0, T]} (z-w) &= \min_{|x|=L} \min_{t \in [0, T]} \left[\frac{2dC_1}{L^2} \left(\frac{x^2}{2d} + Dt \right) + M_0 - w(x, t) \right] \\ &= \min_{|x|=L} \min_{t \in [0, T]} \left[C_1 + \frac{2dC_1 D}{L^2} t + M_0 - w(x, t) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Quindi $\min_{\overline{Q_{T,L}}} (z-w) \geq 0$, ovvero

$$w(x, t) \leq \frac{2dC_1}{L^2} \left(\frac{x^2}{2d} + Dt \right) + M_0 \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega_L} \times [0, T].$$

Nel limite $L \rightarrow +\infty$ otteniamo $w(x, t) \leq M_0$ per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$, che è la tesi. $\square$

COROLLARIO 10.6. Sia $w \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ tale che

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, T),$$

con D una costante positiva. Supponiamo inoltre che esista $C > -\infty$ tale che

$$w \geq C \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times [0, T].$$

Allora

$$\inf_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} w = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} w(x, 0).$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente applicare il Teorema 10.5 alla funzione $-w$.

□

TEOREMA 10.7. *Il problema di Cauchy globale,*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, T), \\ u(x, 0) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

possiede al più una soluzione limitata in $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$.

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1, u_2 soluzioni dello stesso problema di Cauchy, allora $w = u_1 - u_2$ è una funzione limitata che soddisfa l'equazione omogenea con dato iniziale $w(x, 0) \equiv 0$. Pertanto, dal Teorema 10.5 e dal Corollario 10.6 si ha

$$0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} w(x, 0) = \inf_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} w(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} w(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} w(x, 0) = 0.$$

Dunque $w(x, t) \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \times [0, T]$.

□

OSSERVAZIONE 10.3. Ricordiamo che l'unicità si può dimostrare in uno spazio più grande, noto come classe delle funzioni di Tichonov, costituito dalle funzioni $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ per ciascuna delle quali si possano determinare delle costanti $K, \alpha > 0$ tali che

$$|u(x, t)| \leq Ke^{\alpha x^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T].$$

L'unicità invece non sussiste se si ammette una crescita maggiore. Ricordiamo al riguardo l'esempio di Tychonov. Sia $\tau(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, la funzione definita come segue,

$$\tau(x, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k},$$

dove

$$h^{(k)}(t) = \frac{d^k h(t)}{dt^k}, \quad h(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Si dimostra che $\tau(x, t)$ è continua fino alla frontiera $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$ e che $\tau(x, t) \rightarrow 0$ per $t \downarrow 0$. Inoltre si può dimostrare che per $t > 0$ la funzione $\tau(x, t)$ soddisfa l'equazione del calore omogenea $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}$. Dunque, oltre alla soluzione banale $u(x, t) \equiv 0$, anche $\tau(x, t)$ è soluzione del problema di Cauchy globale con dato iniziale nullo. D'altra parte si può verificare che, per opportune costanti $c_1, c_2 > 0$,

$$\tau(x, t) \sim \exp \left\{ -c_1 \frac{1}{t^2} + c_2 \frac{x^2}{t} \right\}$$

per $|x| \rightarrow \infty$ e $t \downarrow 0$. In particolare, $\tau(x, t)$ non ammette una stima del tipo $|\tau(x, t)| \leq Ke^{\alpha x^2}$ in nessuna striscia $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Si noti che, almeno formalmente, è facile verificare che τ è soluzione dell'equazione del calore. Infatti, derivando termine a termine la serie di potenze che

la definisce, si ha

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(t)}{(2k)!} 2k(2k-1)x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k} = \frac{\partial \tau}{\partial t}(x, t).$$

10.4. Soluzione fondamentale

Procediamo analogamente al caso dell'equazione delle onde e cerchiamo la soluzione fondamentale $\Gamma(x, y, t)$, ovvero la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, y, t) = D\Delta_x \Gamma(x, y, t) & \text{per } (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ \Gamma(x, y, 0) = \delta_y(x) & \text{per } (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Anche in questo caso per l'invarianza sotto traslazioni si ha

$$\Gamma(x, y, t) = \Gamma(x - y, 0, t) = \Gamma(x - y, t)$$

con $\Gamma(x, t)$ soluzione di

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) = D\Delta \Gamma(x, t) & \text{per } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ \Gamma(x, 0) = \delta(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Calcoliamo $\Gamma(x, t)$ attraverso la sua trasformata di Fourier rispetto alla variabile spaziale,

$$\widehat{\Gamma}(\xi, t) = \mathcal{F}(\Gamma(\cdot, t)) = \int dx \Gamma(x, t) e^{-i\xi \cdot x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Ricordando che $\mathcal{F}(\Delta T) = -|\xi|^2 \mathcal{F}(T)$ deduciamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\Gamma}}{\partial t}(\xi, t) = -D|\xi|^2 \widehat{\Gamma}(\xi, t) & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ \widehat{\Gamma}(\xi, 0) = 1 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Dunque

$$\widehat{\Gamma}(\xi, t) = e^{-D|\xi|^2 t},$$

da cui

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\xi e^{i\xi \cdot x - D|\xi|^2 t} = \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int d\xi_j e^{i\xi_j x_j - D\xi_j^2 t} \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-D\xi_j^2 t})(-x_j) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x_j^2}{4Dt}\right] \\ &= \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4Dt}\right]. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$\Gamma(x, y, t) = \Gamma(x - y, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left[-\frac{|x - y|^2}{4Dt}\right].$$

LEMMA 10.8. *La soluzione fondamentale gode delle proprietà seguenti.*

- (1) $\Gamma(x, y, t) > 0 \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.
- (2) $\Gamma(x, y, t) = \Gamma(y, x, t) \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ (*simmetria*).
- (3) $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.
- (4) $(x, t) \mapsto \Gamma(x, y, t)$ è *soluzione classica dell'equazione del calore su $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$* ,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, y, t) = D\Delta_x \Gamma(x, y, t).$$

- (5) *Sia $g \in C(\mathbb{R}^d)$ una funzione limitata. Allora valgono i limiti*

$$(5a) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int dy \Gamma(x, y, t) g(y) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(5b) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \int dx \Gamma(x, y, t) g(x) = g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. I punti (1), (2), (3) e (4) seguono banalmente dalla forma esplicita di Γ . Per il punto (5), in virtù del punto (2), è sufficiente dimostrare (5a). Con il cambiamento di variabile $z = (y - x)/\sqrt{4Dt}$ si ha

$$\int dy \Gamma(x, y, t) g(y) = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int dz e^{-|z|^2} g(x + z\sqrt{t}),$$

da cui la tesi per il teorema della convergenza dominata. $\square$

OSSERVAZIONE 10.4. La funzione $\Gamma(x, t)$ è una soluzione dell'equazione del calore di *autosimilarità* (o *autosimile*):

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{t^{d/2}} \Gamma\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+.$$

Ovvero, il suo profilo spaziale al tempo t si ottiene da quello al tempo $t = 1$ mediante un riscaldamento per un fattore $1/t^{d/2}$ della funzione e $1/\sqrt{t}$ del suo argomento. Vale la pena notare che tale proprietà si deduce anche senza la conoscenza esplicita della funzione $\Gamma(x, t)$. Infatti, assumendo l'unicità, se eseguiamo una *dilatazione parabolica* $(x, t) \rightarrow (\alpha x, \alpha^2 t)$ di un fattore $\alpha > 0$, la nuova funzione

$$\Gamma_\alpha(x, t) = \alpha^d \Gamma(\alpha x, \alpha^2 t)$$

è anch'essa soluzione fondamentale, in quanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial t}(x, t) &= \alpha^{d+2} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^{d+2} D\Delta \Gamma(\alpha x, \alpha^2 t) = D\Delta \Gamma_\alpha(x, t), \\ \Gamma_\alpha(x, 0) &= \alpha^d \Gamma(\alpha x, 0) = \alpha^d \delta(\alpha x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Dunque

$$\Gamma(x, t) = \alpha^d \Gamma(\alpha x, \alpha^2 t) \quad \forall (x, t, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

Scegliendo $\alpha = 1/\sqrt{t}$ otteniamo la proprietà di autosimilarità.

10.5. Problema di Cauchy globale

10.5.1. Problema omogeneo. Dai risultati della precedente sezione otteniamo facilmente il seguente risultato di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy globale omogeneo.

TEOREMA 10.9. *Assegnata $g \in C(\mathbb{R}^d)$ limitata, il problema di Cauchy globale omogeneo*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $u(x, t)$ nello spazio delle funzioni

$$w \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) : \sup_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} |w(x, t)| < \infty \quad \forall T > 0.$$

Tale soluzione è data dalla seguente formula integrale,

$$u(x, t) = \int dy \Gamma_d(x - y, t) g(y). \quad (10.7)$$

Infine, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue dal principio del massimo globale. Sotto le ipotesi su g è possibile derivare sotto il segno di integrale nella (10.7) rispetto alle variabili (x, t) , cosicché $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ è una soluzione classica dell'equazione. La continuità al tempo $t = 0$ segue dal punto (5a) del Lemma 10.8. Infine, poiché $|u(x, t)| \leq \|g\|_\infty$, la soluzione u appartiene alla classe di unicità. L'ultima affermazione, ovvero che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, segue dai classici teoremi di derivazione sotto il segno di integrale applicati all'integrale nel membro di destra della (10.7). In effetti tale integrale può essere derivato infinite volte rispetto ad x e t , in quanto si verifica facilmente che, per ogni multi-indice $(n_0, n_1, \dots, n_d)$ di interi positivi, l'integrale

$$\int dy \frac{\partial^{|n|} \Gamma_d(x - y, t)}{\partial t^{n_0} \partial x_1^{n_1} \dots \partial x_d^{n_d}} g(y), \quad \left(\text{dove } |n| := \sum_{i=0}^d n_i \right),$$

converge assolutamente ed uniformemente al variare dei parametri (x, t) in sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. $\square$

OSSERVAZIONE 10.5. Poiché $\Gamma_d(x, t) > 0$ si ha $u(x, t) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $t > 0$ purché $g \geq 0$ e $g(x_0) > 0$ in almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Tale proprietà rappresenta l'analogo del principio di massimo forte nel caso del problema globale. Significa che la massa iniziale, per quanto concentrata, si diffonde immediatamente in tutto lo spazio $\mathbb{R}^d$. Altrimenti detto, il valore della soluzione $u(x, t)$ al tempo $t > 0$ dipende dal valore di g in ogni punto, ovvero la velocità di propagazione di una perturbazione iniziale è infinita. Vale però la pena osservare che se $g(x) = 0$ per $|x| > R$, $R > 0$, allora $u(x, t)$ è esponenzialmente piccola nel quadrato di $|x| - R$. Infatti, dalla (10.7) e dalla definizione di $\Gamma_d(x, t)$, si trova facilmente

che

$$|u(x, t)| \leq \frac{\|g\|_\infty |B_R(0)|}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp \left[-\frac{(|x| - R)^2}{4Dt} \right],$$

dove $|B_R(0)|$ è il volume della bolla $B_R(0)$ di raggio R e centro l'origine.

OSSERVAZIONE 10.6. La formula (10.7) ha senso anche per funzioni g non continue e illimitate, ad esempio con una crescita non superiore ad $e^{|x|^\gamma}$ con $\gamma < 2$. Non solo, ma anche in questo caso $u(x, t)$ è regolare (anzi C^∞) per ogni $t > 0$. Dunque, a differenza dell'equazione delle onde, l'equazione del calore regolarizza molto i dati iniziali (la stessa soluzione fondamentale $\Gamma_d(x, t)$ è infinitamente derivabile per $t > 0$ ed ha come dato iniziale una distribuzione). Chiaramente, maggiore è la irregolarità del dato iniziale, più debole sarà il senso in cui tale dato è assunto dalla soluzione. Ad esempio, nel caso della soluzione fondamentale, l'identità $\Gamma_d(x, 0) = \delta(x)$ sussiste nel senso delle distribuzioni, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int dx \Gamma_d(x, t) \varphi(x) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

OSSERVAZIONE 10.7. Dalla formula (10.7) seguono facilmente stime di continuità rispetto ai dati iniziali; ad esempio $\|u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$ per ogni $t \geq 0$.

OSSERVAZIONE 10.8. Se il dato iniziale ha una crescita della forma $g(x) \sim (\text{cost})e^{a|x|^2}$ con $a > 0$, allora la formula (10.7) fornisce una soluzione locale fino al tempo $t_* = (4Da)^{-1}$. Ristretta ad un intervallo $[0, T]$ con $T < t_*$ essa fornisce quindi l'unica soluzione nella corrispondente classe di Tychonov (cfr. l'Osservazione 10.3).

10.5.2. Problema non omogeneo. Il problema non omogeneo (10.1) può essere risolto con il metodo di Duhamel. Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u(x, t) = \int dy \Gamma_d(x - y, t) g(y) + w(x, t),$$

con $w(x, t)$ soluzione del problema con condizioni omogenee,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = D\Delta w + f & \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ w(x, 0) = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (10.8)$$

che pensiamo ottenuta come somma di infiniti contributi infinitesimi relativi alla diffusione della distribuzione di materia $f(x, s)ds$ rilasciata o assorbita ai tempi $s < t$. Dunque,

$$w(x, t) = \int_0^t ds w(x, t; s), \quad w(x, t; s) = \int dy \Gamma_d(x - y, t - s) f(y, s).$$

Formalmente si vede facilmente che $w(x, t)$ è soluzione del problema (10.8). Infatti $w(x, 0) = 0$ e, assumendo lecite le operazioni di derivazione sotto il segno di

integrale,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \int_0^t ds \frac{\partial w}{\partial t}(x, t; s) + w(x, t; t) = \int_0^t ds D\Delta w(x, t; s) + f(x, t) \\ &= D\Delta \int_0^t ds w(x, t; s) + f(x, t) = D\Delta w(x, t) + f(x, t).\end{aligned}$$

Perché tali operazioni siano corrette occorrono però ipotesi di regolarità sulla forzante. Infatti

$$\frac{\partial \Gamma_d}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{t^{(d+2)/2}} \frac{1}{(4\pi D)^{d/2}} \left(\frac{x^2}{4Dt} - \frac{d}{2} \right) \exp \left[-\frac{x^2}{4Dt} \right] = \frac{1}{t^{(d+2)/2}} G \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right),$$

avendo definito

$$G(z) = \left(\frac{z^2}{4D} - \frac{d}{2} \right) \Gamma_d(z, 1).$$

Pertanto, con la sostituzione $z = (y - x)/\sqrt{t - s}$,

$$\int_0^t ds \frac{\partial w}{\partial t}(x, t; s) = \int_0^t \frac{ds}{t - s} \int dz G(z) f(x + z\sqrt{t - s}, s),$$

che in generale può essere infinito essendo $(t - s)^{-1}$ non integrabile sull'intervallo $(0, t)$. Ad esempio, la semplice continuità di f non è sufficiente ad escludere tale evenienza. Se però f è sufficientemente regolare l'integrale può essere convergente, come si evince notando che nel caso limite in cui f è costante l'integrazione nella variabile z è nulla, essendo

$$\int dz \frac{z^2}{4D} \Gamma_d(z, 1) = \frac{d}{2}.$$

TEOREMA 10.10. *Siano $g \in C(\mathbb{R}^d)$ limitata ed $f \in C^{2,0}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ tale che $f, \nabla_x f, D_x^2 f$ limitate in $\mathbb{R}^d \times [0, T]$. Allora*

$$u(x, t) = \int dy \Gamma_d(x - y, t) g(y) + \int_0^t ds \int dy \Gamma_d(x - y, t - s) f(y, s)$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy globale non omogeneo nella classe delle funzioni $w \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ limitate.

Dimostrazione. L'unicità segue dal principio del massimo globale. Posto ora

$$V(x, t) = \int_0^t ds \int dy \Gamma_d(x - y, t - s) f(y, s),$$

occorre verificare che $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0, T))$ ed è soluzione del problema (10.8). Con la sostituzione $z = (y - x)/\sqrt{t - s}$ si ha

$$V(x, t) = \int_0^t ds \int dz \Gamma_d(z, 1) f(x + z\sqrt{t - s}, s),$$

da cui

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = f(x, t) + \int_0^t ds \int dz \frac{\Gamma_d(z, 1)}{2\sqrt{t - s}} z \cdot \nabla f(x + z\sqrt{t - s}, s).$$

Si osservi che la derivazione sotto il segno di integrale è legittima poiché, per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int dz \left| \frac{\Gamma_d(z, 1)}{2\sqrt{t-s}} z \cdot \nabla f(x + z\sqrt{t-s}, s) \right| &\leq \|\nabla f\|_\infty \int_0^t ds \int dz \frac{\Gamma_d(z, 1) |z|}{2\sqrt{t-s}} \\ &= C \|\nabla f\|_\infty \sqrt{T} < \infty, \end{aligned}$$

con

$$C = \int dz \Gamma_d(z, 1) |z|, \quad \|\nabla f\|_\infty = \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]} |\nabla f(x, t)|.$$

Dall'espressione esplicita del nucleo $\Gamma_d(z, 1)$ si ha $\Gamma_d(z, 1)z = -2D\nabla\Gamma_d(z, 1)$. Pertanto, essendo

$$\begin{aligned} \nabla\Gamma_d(z, 1) \cdot \nabla f(x + z\sqrt{t-s}, s) &= \operatorname{div}_z [\Gamma_d(z, 1) \nabla f(x + z\sqrt{t-s}, s)] \\ &\quad - \Gamma_d(z, 1) \sqrt{t-s} \Delta f(x + z\sqrt{t-s}, s), \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) &= f(x, t) + D \int_0^t ds \int dz \Gamma_d(z, 1) \Delta f(x + z\sqrt{t-s}, s) \\ &\quad - \int_0^t ds \frac{D}{\sqrt{t-s}} \int dz \operatorname{div}_z [\Gamma_d(z, 1) \nabla f(x + z\sqrt{t-s}, s)]. \end{aligned}$$

Il primo integrale nel membro di destra converge assolutamente ed uniformemente per $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]$ poiché abbiamo assunto le derivate seconde $D_x^2 f$ limitate. Quindi,

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int dz \Gamma_d(z, 1) \Delta f(x + z\sqrt{t-s}, s) &= \Delta \int_0^t ds \int dz \Gamma_d(z, 1) f(x + z\sqrt{t-s}, s) \\ &= \Delta w(x, t). \end{aligned}$$

D'altra parte, per il teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} &\int dz \operatorname{div}_z [\Gamma_d(z, 1) \nabla f(x + z\sqrt{t-s}, s)] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} dz \operatorname{div}_z [\Gamma_d(z, 1) \nabla f(x + z\sqrt{t-s}, s)] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(\zeta) \Gamma_d(\zeta, 1) \nu(\zeta) \cdot \nabla f(x + \zeta\sqrt{t-s}, s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

dove $B_R(0)$ è la bolla in $\mathbb{R}^d$ di centro l'origine e raggio R , $\nu(\zeta) = \zeta/R$ è la normale esterna alla bolla, mentre l'ultima uguaglianza segue dalla stima

$$\left| \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(\zeta) \Gamma_d(\zeta, 1) \nu(\zeta) \cdot \nabla f(x + \zeta\sqrt{t-s}, s) \right| \leq \frac{\|\nabla f\|_\infty |\partial B_R(0)|}{(4\pi D)^{d/2}} e^{-R^2/(4D)}.$$

Dunque $\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = f(x, t) + \Delta V(x, t)$. Con stime analoghe, che omettiamo, si mostra che $V(x, t)$ è continua in $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ e che le derivate seconde $D_x^2 V(x, t)$ sono continue in $\mathbb{R}^d \times (0, T)$, il che conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

ESERCIZIO 10.1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy globale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = xe^{-x^2} & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare inoltre, al variare di $k > 0$,

$$\bar{u}_k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^k u(x, t).$$

ESERCIZIO 10.2. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy globale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \cos x & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \cos x & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 10.3. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy globale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x) + \sin t \sin x_1 \sin x_2 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 1 & \text{per } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

10.6. Risoluzione di problemi con il metodo delle riflessioni

La soluzione generale del problema di Cauchy globale permette di calcolare anche la soluzione di alcuni problemi con bordo. Considereremo nel seguito problemi in dimensione $d = 1$ e porremo, per brevità di notazione, $\Gamma(x, t) = \Gamma_1(x, t)$.

ESEMPIO 10.1. Prendiamo in esame il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (10.9)$$

Cerchiamo una funzione $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, che coincida con g sull'intervallo $[0, L]$ e sia tale che la soluzione $\tilde{u}(x, t)$ del problema di Cauchy globale di dato iniziale $\tilde{g}$ si annulli, identicamente nel tempo, per $x = 0$ ed $x = L$. Chiaramente, la restrizione di $\tilde{u}(x, t)$ all'intervallo $[0, L]$, ovvero la funzione

$$u(x, t) = \int dy \Gamma(x - y, t) \tilde{g}(y), \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, \infty), \quad (10.10)$$

fornisce allora la soluzione del problema (10.9).

Asseriamo che la funzione cercata si ottiene prolungando g per disparità in $[-L, L]$ e quindi per periodicità in tutto $\mathbb{R}$. Altrimenti detto, $\tilde{g}$ è determinata imponendo

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0, L], \\ -g(-x) & \text{se } x \in [-L, 0], \end{cases} \quad \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x + 2L) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(si osservi che $\tilde{g} \in C(\mathbb{R})$ poiché $g(0) = g(L) = 0$). A tal scopo dimostriamo che anche a tempi positivi $t > 0$ la soluzione $\tilde{u}(x, t)$ è una funzione dispari e $2L$ -periodica di x (il che implica in particolare $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(L, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$). Tale proprietà segue dall'invarianza rispetto a traslazioni e riflessioni dell'equazione del calore. Osserviamo infatti che le funzioni

$$v_{\pm}(x, t) = \pm \tilde{u}(-x, t), \quad v_L(x, t) = \tilde{u}(x + 2L, t) \quad (10.11)$$

sono anch'esse soluzioni dell'equazione del calore, di dati iniziali rispettivamente $\tilde{g}_{\pm}(x) = \pm \tilde{g}(-x)$ e $\tilde{g}_L(x) = \tilde{g}(x + 2L)$. Ma per la definizione di $\tilde{g}(x)$ è chiaramente $\tilde{g}_{-}(x) = \tilde{g}_L(x) = \tilde{g}(x)$. Ne segue, per l'unicità della soluzione, che

$$\tilde{u}(x, t) = -\tilde{u}(-x, t) = \tilde{u}(x + 2L, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Notiamo infine che è possibile esprimere esplicitamente la soluzione u in termini del dato iniziale g . Infatti, sfruttando la periodicità di $\tilde{g}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int dy \Gamma(x - y, t) \tilde{g}(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{(2n-1)L}^{(2n+1)L} dy \Gamma(x - y, t) \tilde{g}(y) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-L}^L dy \Gamma(x - y - 2nL, t) \tilde{g}(y + 2nL) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-L}^L dy \Gamma(x - y - 2nL, t) \tilde{g}(y). \end{aligned}$$

Poiché $\tilde{g}$ in $[-L, L]$ è il prolungamento dispari di g , si ha inoltre

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^L dy \Gamma(x - y - 2nL, t) \tilde{g}(y) \\ &= \int_0^L dy \Gamma(x - y - 2nL, t) g(y) - \int_{-L}^0 dy \Gamma(x - y - 2nL, t) g(-y) \\ &= \int_0^L dy \Gamma(x - y - 2nL, t) g(y) - \int_0^L dy \Gamma(x + y - 2nL, t) g(y) \\ &= \int_0^L dy [\Gamma(x - y - 2nL, t) - \Gamma(x + y - 2nL, t)] g(y). \end{aligned}$$

Pertanto

$$u(x, t) = \int_0^L dy G_D(x, y, t) g(y), \quad x \in [0, L], \quad t > 0,$$

avendo definito la *soluzione fondamentale del problema di Cauchy-Dirichlet*,

$$G_D(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\Gamma(x - y - 2nL, t) - \Gamma(x + y - 2nL, t)], \quad x, y \in [0, L], \quad t > 0.$$

Vale la pena notare che il calcolo precedente è in effetti valido per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che $G_D(x, y, t)$ è una funzione $2L$ -periodica e dispari rispetto alla variabile x (lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima affermazione). Dunque la soluzione del problema globale si scrive nella medesima forma,

$$\tilde{u}(x, t) = \int_0^L dy G_D(x, y, t) g(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

da cui si deduce anche a posteriori che essa è una funzione $2L$ -periodica e dispari della variabile x .

ESEMPIO 10.2. Consideriamo ora il problema di Cauchy-Neumann omogeneo,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (10.12)$$

In questo caso la funzione $\tilde{g}$ si ottiene prolungando g per parità in $[-L, L]$ e quindi per periodicità in tutto $\mathbb{R}$, ovvero

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [0, L], \\ g(-x) & \text{se } x \in [-L, 0], \end{cases} \quad \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x + 2L) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$ assumendo, compatibilmente con il problema di Neumann, che $g \in C^1([0, L])$ con $g'(0) = g'(L) = 0$. Ragionando come nell'esempio precedente, ora sulla coppia di funzioni $v_+(x, t)$ e $v_L(x, t)$ in (10.11), si dimostra che l'equazione del calore preserva la parità e periodicità del dato iniziale, e si conclude infine che la soluzione del problema (10.12) si scrive nella forma

$$u(x, t) = \int_0^L dy G_N(x, y, t) g(y), \quad x \in [0, L], \quad t > 0,$$

avendo definito la *soluzione fondamentale del problema di Cauchy-Neumann*,

$$G_N(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\Gamma(x - y - 2nL, t) + \Gamma(x + y - 2nL, t)], \quad x, y \in [0, L], \quad t > 0.$$

Lasciamo al lettore il dettaglio della prova e la verifica diretta che $G_N(x, y, t)$ è una funzione $2L$ -periodica e pari rispetto alla variabile x .

ESEMPIO 10.3. Analogamente si trattano i problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann sulla semiretta,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, \infty), \\ u(0, t) = 0 & \text{per } t \geq 0, \end{cases} \quad (10.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (10.14)$$

La funzione $\tilde{g}$ si ottiene prolungando g , rispettivamente, per disparità e parità in tutto $\mathbb{R}$. Si trova in tal modo,

$$u(x, t) = \int_0^\infty dy G_D(x, y, t) g(y), \quad x \geq 0, \quad t > 0,$$

per il problema di Dirichlet e

$$u(x, t) = \int_0^\infty dy G_N(x, y, t) g(y), \quad x \geq 0, \quad t > 0,$$

per il problema di Neumann, dove ora

$$\begin{cases} G_D(x, y, t) = \Gamma(x - y, t) - \Gamma(x + y, t), \\ G_N(x, y, t) = \Gamma(x - y, t) + \Gamma(x + y, t), \end{cases} \quad x, y \geq 0, \quad t > 0.$$

10.7. Risoluzione di problemi con il metodo di Fourier

Per risolvere i problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann con condizioni al bordo omogenee si può ragionare esattamente come fatto in Sezione 8.2, cercando la soluzione formale nella forma

$$u(x, t) = \sum_n W_n(t) v_n(x),$$

dove $\{v_n(x), \lambda_n\}$ è il sistema completo di autofunzioni/autovalori (che supponiamo noto) per il relativo problema agli autovalori. In questo caso $W_n(t)$ è soluzione dell'equazione del prim'ordine $\dot{W}_n(t) = \lambda_n D W_n(t)$, cosicché $W_n(t) = W_n(0) e^{\lambda_n D t}$, e le condizioni iniziali $W_n(0)$ sono determinate richiedendo che

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_n W_n(0) v_n(x),$$

da cui, per l'ortogonalità delle autofunzioni,

$$W_n(0) = \frac{\int_\Omega dx g v_n}{\int_\Omega dx v_n^2}.$$

In particolare, nel caso unidimensionale, ovvero della propagazione del calore in una sbarra, i sistemi di autofunzioni sono forniti dalla teoria delle serie di Fourier e possiamo quindi risolvere esplicitamente tutta una serie di problemi, esattamente come fatto nel caso della corda vibrante. Vediamone alcuni esempi significativi.

ESEMPIO 10.4. Prendiamo in esame il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo (10.9) dell'Esempio 10.1. In questo caso $v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ e $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n \geq 1$, pertanto la soluzione si scrive nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \hat{g}_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \hat{g}_n = \frac{2}{L} \int_0^L dy g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

Dal teorema di Fourier sappiamo che se $g \in C^1([0, L])$ e $g(0) = g(L) = 0$ allora $\sum_{n \geq 1} |\hat{g}_n| < \infty$, per cui u è continua su tutta la striscia $[0, L] \times [0, \infty)$ ed il dato iniziale viene assunto uniformemente. D'altra parte notiamo che sotto la sola ipotesi di integrabilità locale di g i coefficienti della serie soluzione convergono a zero esponenzialmente in n^2 ed uniformemente per ogni $t \geq t_0$ con t_0 fissato. Quindi $u \in C^\infty([0, L] \times \mathbb{R}_+)$ e la sua serie può essere derivata termine a termine infinite volte. Ritroviamo in tal modo anche in questo contesto la forte proprietà regolarizzante dell'equazione del calore: l'evoluta di un dato iniziale anche solo

integrabile è infinitamente derivabile ad ogni tempo positivo. Possiamo infine dedurre il comportamento asintotico nel tempo della soluzione. Infatti, per ogni $t \geq 1$,

$$|u(x, t)| \leq \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{L^2}(t-1)\right) \sum_{n \geq 1} |\hat{g}_n| \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2}\right) = C \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{L^2} t\right),$$

cioè $u(x, t) \rightarrow 0$ esponenzialmente in t ed uniformemente su $[0, L]$, con un tasso pari a D volte il modulo del primo autovalore.

ESEMPIO 10.5. Prendiamo in esame il problema di Cauchy-Neumann omogeneo (10.12) dell'Esempio 10.2. In questo caso $v_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ e $\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, $n \geq 0$, pertanto la soluzione si scrive nella forma

$$u(x, t) = \frac{\hat{g}_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \hat{g}_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \hat{g}_n = \frac{2}{L} \int_0^L dy g(y) \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

Dal teorema di Fourier sappiamo che se $g \in C^1([0, L])$ e $g'(0) = g'(L) = 0$ allora $\sum_{n \geq 0} |\hat{g}_n| < \infty$, per cui u è continua su tutta la striscia $[0, L] \times [0, \infty)$ ed il dato iniziale viene assunto uniformemente. D'altra parte, ragionando come nell'Esempio 10.4, sotto l'ipotesi di semplice integrabilità locale di g deduciamo che $u \in C^\infty([0, L] \times \mathbb{R}_+)$ e che la sua serie può essere derivata termine a termine infinite volte. Infine, in questo caso, per ogni $t \geq 1$,

$$\left|u(x, t) - \frac{\hat{g}_0}{2}\right| \leq \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{L^2}(t-1)\right) \sum_{n \geq 1} |\hat{g}_n| \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2}\right) = C \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{L^2} t\right),$$

cioè $u(x, t) \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L dy g(y)$ esponenzialmente in t ed uniformemente su $[0, L]$, con un tasso pari a D volte il modulo del primo autovalore non nullo. Il fatto che converga alla media del dato iniziale non deve sorprendere. Infatti le condizioni di Neumann omogenee implicano che la massa totale $\int_0^L dx u(x, t)$ è conservata, ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_0^L dx u(x, t) = D \int_0^L dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = D \left[\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right] = 0,$$

pertanto se $u(x, t)$ tende ad una costante questa deve essere pari alla media del dato iniziale.

ESEMPIO 10.6. Le versioni non omogenee dei problemi (10.9) e (10.12) possono risolversi con il metodo di Duhamel, che può essere applicato sia nel contesto del metodo delle riflessioni che in quello di Fourier. Ad esempio, nel caso del problema di Cauchy-Dirichlet con dati al bordo omogenei e forzante $f(x, t)$ possiamo esprimere la soluzione formale nella forma (cfr. l'Esempio 10.1)

$$u(x, t) = \int_0^L dy G_D(x, y, t) g(y) + \int_0^t ds \int_0^L dy G_D(x, y, t-s) f(y, s),$$

oppure, supponendo che la forzante sia espandibile in serie di seni,

$$f(x, t) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \hat{f}_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dy f(y, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right),$$

nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

dove, posto $W_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L dy g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right)$,

$$W_n(t) = W_n(0) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} t\right) + \int_0^t ds \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} (t-s)\right) \hat{f}_n(s).$$

Analogamente, nel caso del problema di Cauchy-Neumann, (cfr. l'Esempio 10.2)

$$u(x, t) = \int_0^L dy G_N(x, y, t) g(y) + \int_0^t ds \int_0^L dy G_N(x, y, t-s) f(y, s),$$

oppure, supponendo che la forzante sia espandibile in serie di coseni,

$$f(x, t) = \frac{\hat{f}_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} \hat{f}_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \hat{f}_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L dy f(y, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right),$$

nella forma

$$u(x, t) = \frac{W_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} W_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

dove, posto ora $W_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L dy g(y) \cos\left(\frac{n\pi}{L} y\right)$,

$$W_0(t) = W_0(0) + \int_0^t ds \hat{f}_0(s),$$

$$W_n(t) = W_n(0) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} t\right) + \int_0^t ds \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} (t-s)\right) \hat{f}_n(s), \quad n \geq 1.$$

Tutte le soluzioni sopra trovate sono non solo formali se sono lecite le operazioni di derivazione (una rispetto a t e due rispetto a x) attraverso gli integrali e le serie. Questo è garantito se la forzante f è sufficientemente regolare. Ad esempio se $f \in C^2([0, L] \times [0, \infty))$ e $f(0, t) = f(L, t) = 0$ (nel caso di Dirichlet) ovvero $\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(L, t) = 0$ (nel caso di Neumann).

ESEMPIO 10.7. Il problema della propagazione del calore in una piastra rettangolare con condizioni di temperatura nulla al bordo può essere risolto con il metodo della separazione delle variabili analogamente alle vibrazioni libere di una membrana rettangolare discusse in Sezione 8.2. Con la notazione di quella sezione si trova ora la soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n, k \geq 1} \hat{g}_{n, k} \exp\left[-\pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{k^2}{L_2^2}\right) t\right] V_{n, k}(x),$$

dove

$$\hat{g}_{n, k} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} dx g(x) V_{n, k}(x),$$

con $g(x) = u(x, 0)$ la temperatura iniziale della piastra.

ESEMPIO 10.8. Consideriamo il problema del flusso di calore in una sbarra i cui estremi sono tenuti a temperature differenti,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \quad (10.15)$$

I dati al bordo sono non omogenei per cui non possiamo applicare direttamente il metodo di Fourier. D'altra parte il problema stazionario con le stipulate condizioni al bordo ha l'unica soluzione $\bar{u}(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$. Se cerchiamo la soluzione nella forma $u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t)$, allora $v(x, t)$ risolve il problema omogeneo di dati iniziali $v(x, 0) = g(x) - \bar{u}(x)$, pertanto

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + \sum_{n \geq 1} c_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L dy [g(y) - \bar{u}(y)] \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right).$$

Osserviamo che ora $u(x, t) \rightarrow \bar{u}(x)$ esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$.

Si tratta in modo analogo il problema di Cauchy-Neumann con flusso uguale agli estremi, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \tau$, in cui esiste una famiglia di soluzioni stazionarie $\bar{u}_\alpha(x) = \alpha + \tau x$, e quelli misti Dirichlet/Neumann in cui la soluzione stazionaria è univocamente determinata. Nel primo caso si può scegliere ad esempio $\alpha = \frac{\bar{g}_0}{2} - \frac{\tau L}{2}$, cosicché $\frac{1}{L} \int_0^L dy g(y) = \frac{1}{L} \int_0^L dy \bar{u}_\alpha(y)$, e dunque $u(x, t) - \bar{u}_\alpha(x)$ ha media nulla e tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

ESERCIZIO 10.4. Risolvere con il metodo di Fourier il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = \frac{(x-L)^2}{L^2} & \text{per } x \in [0, L], \\ u(0, t) = 1, \quad u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 10.5. Si consideri il problema di Cauchy-Neumann con flussi differenti agli estremi, diciamo $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \tau_1$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \tau_2$ con $\tau_1 \neq \tau_2$ (in questo caso non esiste una soluzione stazionaria). Determinare allora la soluzione formale cercandola nella forma $u(x, t) = \tilde{u}(x) + v(x, t)$ con

$$\tilde{u}(x) = -\frac{\tau_1}{2L}(x-L)^2 + \frac{\tau_2}{2L}x^2.$$

10.8. Derivazione microscopica dell'equazione del calore

Deriviamo l'equazione del calore da un modello probabilistico di dinamica microscopica, in cui l'effetto dell'ambiente (o mezzo) su ciascuna particella (della sostanza la cui diffusione nel mezzo si vuole descrivere) viene schematizzato mediante forze stocastiche. In effetti, in assenza di informazioni a priori

sulla presenza di forze ordinate che agiscono sulla particella, è ragionevole assumere che l'effetto degli innumerevoli urti caotici e disordinati che essa subisce con i componenti (molecole) del mezzo non dia luogo a direzioni privilegiate nel suo movimento; piuttosto essa avrà uguale probabilità di andare in ogni possibile direzione dello spazio.

Prendiamo in esame il più semplice dei modelli compatibili con tale comportamento, la *passeggiata aleatoria simmetrica in dimensione $d = 1$* .

Supponiamo che la particella possa occupare le posizioni del reticolo di passo ε , $\varepsilon\mathbb{Z} = \{x = \varepsilon k : k \in \mathbb{Z}\}$, e che, ai tempi discreti t di passo τ , $t \in \tau\mathbb{N} = \{\tau n : n \in \mathbb{N}\}$, essa si sposti, con uguale probabilità $p = 1 - p = 1/2$, sul sito a destra o sul sito a sinistra di quello occupato. Assumiamo inoltre che ogni salto è un evento indipendente dai precedenti e che al tempo $t = 0$ la particella occupi la posizione $x = 0$.

Possiamo descrivere questo processo aleatorio mediante una collezione di variabili di Bernoulli $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, indipendenti ed identicamente distribuite secondo la legge

$$\mathbb{P}(\xi_j = -1) = \mathbb{P}(\xi_j = 1) = \frac{1}{2}, \quad j \in \mathbb{N},$$

dove con $\mathbb{P}(A)$ indichiamo la probabilità dell'evento A . Infatti, ponendo

$$S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

è evidente che posizione della particella al tempo $t = \tau n$ è fornita dalla variabile aleatoria

$$X_t^{(\varepsilon)} = \varepsilon S_n = \varepsilon S_{t/\tau}.$$

Indichiamo con $p_\varepsilon(x, t)$ la probabilità che la particella si trovi in $x \in \varepsilon\mathbb{Z}$ al tempo $t = \tau n$. Cercheremo un opportuno limite del continuo, $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\tau = \tau(\varepsilon) \rightarrow 0$, tale che il limite della distribuzione di probabilità della variabile $X_t^{(\varepsilon)}$ sia non banale, ovvero descriva la distribuzione di una variabile aleatoria X_t con media finita e varianza finita e non nulla. A tal scopo osserviamo preliminarmente che

$$\mathbb{E}(\xi_i) = 0, \quad \mathbb{E}(\xi_i \xi_j) = \begin{cases} \mathbb{E}(\xi_i^2) = 1 & \text{se } i = j, \\ \mathbb{E}(\xi_i) \mathbb{E}(\xi_j) = 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

dove indichiamo con $\mathbb{E}(\eta)$ il valore di attesa della variabile aleatoria η . Pertanto,

$$\mathbb{E}(X_t^{(\varepsilon)}) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\xi_j) = 0, \quad \mathbb{E}((X_t^{(\varepsilon)})^2) = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\xi_i \xi_j) = \varepsilon^2 n = \frac{t}{\tau} \varepsilon^2.$$

Questo indica che per avere una distribuzione limite non banale, con $0 < \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, è necessario che $\varepsilon^2/\tau \rightarrow (\text{cost}) \neq 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Altrimenti detto, lo spazio ed il tempo microscopici devono essere scalati attraverso una dilatazione parabolica.

Per individuare la legge limite, cerchiamo un'equazione per la probabilità $p_\varepsilon(x, t)$. Utilizzando la formula della probabilità totale,

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(x, t + \tau) &= \mathbb{P}(X_{t+\tau}^{(\varepsilon)} = x) = \mathbb{P}(X_{t+\tau}^{(\varepsilon)} = x | X_t^{(\varepsilon)} = x + \varepsilon) \mathbb{P}(X_t^{(\varepsilon)} = x + \varepsilon) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{t+\tau}^{(\varepsilon)} = x | X_t^{(\varepsilon)} = x - \varepsilon) \mathbb{P}(X_t^{(\varepsilon)} = x - \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2} p_\varepsilon(x + \varepsilon, t) + \frac{1}{2} p_\varepsilon(x - \varepsilon, t). \end{aligned}$$

Infatti, per l'indipendenza delle variabili ξ_j , le probabilità condizionate sono

$$\mathbb{P}(X_{t+\tau}^{(\varepsilon)} = x | X_t^{(\varepsilon)} = x \pm \varepsilon) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = \mp 1 | X_t^{(\varepsilon)} = x \pm \varepsilon) = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = \mp 1) = \frac{1}{2},$$

dove $n = t/\tau$. Pertanto,

$$p_\varepsilon(x, t + \tau) - p_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} [p_\varepsilon(x + \varepsilon, t) + p_\varepsilon(x - \varepsilon, t) - 2p_\varepsilon(x, t)]. \quad (10.16)$$

Supponiamo ora che in un opportuno limite di scala $\varepsilon, \tau \rightarrow 0$ la distribuzione di probabilità della variabile $X_t^{(\varepsilon)}$ converga a quella di una variabile aleatoria reale X_t , $t \in \mathbb{R}$, la cui legge è caratterizzata da una densità regolare $P(x, t)$, ovvero

$$\mathbb{P}(X_t \in [a, b]) = \int_a^b dx P(x, t) \quad \forall a \leq b.$$

Questo significa che deve aversi, per $\varepsilon, \tau \rightarrow 0$,

$$\mathbb{P}(X_t^{(\varepsilon)} \in [a, b]) = \sum_{\substack{x \in \varepsilon\mathbb{Z} \\ a \leq x \leq b}} p_\varepsilon(x, t) \simeq \int_a^b dx P(x, t) \quad \forall a \leq b.$$

Quindi deve essere $p_\varepsilon(x, t) \simeq \varepsilon P(x, t)$, cosicché dalla (10.16) possiamo dedurre la giusta scala temporale ed un'equazione per $P(x, t)$. Infatti, assumendo sufficiente regolarità,

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \tau \frac{\partial P}{\partial t}(x, t) + o(\tau),$$

$$P(x + \varepsilon, t) + P(x - \varepsilon, t) - 2P(x, t) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) + o(\varepsilon^2),$$

da cui, sostituendo nella (10.16),

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x, t) + o(1) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tau} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t) + \frac{o(\varepsilon^2)}{\tau}.$$

Nuovamente, per avere un limite non banale, troviamo la necessità di una dilatazione parabolica. In particolare, assumendo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\tau} = 2D > 0,$$

la densità $P(x, t)$ soddisfa l'equazione del calore $\frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, t)$ con coefficiente di diffusione D . Inoltre, poiché $p_\varepsilon(x, 0) = \delta_{x,0}$, per ogni funzione f continua e limitata,

$$\mathbb{E}(f(X_0^{(\varepsilon)})) = \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} f(x) p_\varepsilon(x, 0) = f(0) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si deduce che $\mathbb{E}(f(X_0)) = f(0)$, ovvero che $P(x, t) \rightarrow \delta(x)$ per $t \rightarrow 0^+$ nel senso delle distribuzioni. In conclusione,

$$P(x, t) = \Gamma_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right].$$

Altrimenti detto, la soluzione fondamentale dell'equazione del calore è la distribuzione di probabilità (gaussiana) del limite continuo, sotto dilatazione parabolica, di una passeggiata aleatoria simmetrica. Il processo limite X_t è detto *moto browniano* (uscente da $x = 0$).

Osserviamo che

$$\mathbb{E}(X_t) = \int dx P(x, t) x = 0, \quad \mathbb{E}(X_t^2) = \int dx P(x, t) x^2 = 2Dt.$$

In particolare è chiaro il nome di *coefficiente di diffusione* che si attribuisce alla costante D (o talvolta $2D$): nel tempo macroscopico t la particella “diffonde” nello spazio ad una distanza media $\sqrt{2Dt}$ (in unità microscopiche significa che diffonde ad una distanza media $k \sim \varepsilon^{-1}\sqrt{t}$ dopo un tempo $n \sim \varepsilon^{-2}t$).

Si osservi però che, essendo $\varepsilon\tau^{-1} \rightarrow \infty$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, la velocità del processo limite X_t è infinita con probabilità uno. Cioè, con probabilità uno, le traiettorie $t \rightarrow X_t$ sono continue ma non differenziabili. Ed è per questo motivo che la velocità di propagazione per l'equazione del calore risulta infinita: per qualunque tempo $t > 0$ ed intervallo $[a, b]$ della retta, è diversa da zero la probabilità che la particella (inizialmente posta nell'origine) si trovi in $[a, b]$ al tempo t .

Più in generale, se la particella al tempo $t = 0$ non è posta in $x = 0$ ma è posta sul reticolo $\varepsilon\mathbb{Z}$ in modo casuale ed indipendente dal mezzo, secondo una legge di probabilità $\rho_\varepsilon(x)$, ovvero

$$\mathbb{P}(X_0^{(\varepsilon)} \in [a, b]) = \sum_{\substack{x \in \varepsilon\mathbb{Z} \\ a \leq x \leq b}} \rho_\varepsilon(x),$$

allora

$$\mathbb{P}(X_t^{(\varepsilon)} \in [a, b]) = \sum_{y \in \varepsilon\mathbb{Z}} \rho_\varepsilon(y) \sum_{\substack{x \in \varepsilon\mathbb{Z} \\ a \leq x \leq b}} p_\varepsilon(x - y, t).$$

Assumendo che $\rho_\varepsilon(x) \simeq \varepsilon \rho(x)$ per una qualche densità continua di probabilità $\rho(x)$, indicando ora con X_t^ρ la posizione della particella nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha

$$\mathbb{P}(X_t^\rho \in [a, b]) = \int dy \rho(y) \int_a^b dx P(x - y, t) = \int_a^b dx \int dy P(x - y, t) \rho(y),$$

ovvero la variabile aleatoria X_t^ρ è distribuita con densità di probabilità

$$P^\rho(x, t) = \int dy P(x - y, t) \rho(y),$$

che è la soluzione dell'equazione del calore di dato iniziale $\rho(x)$.

Il legame tra la precedente interpretazione probabilistica dell'equazione del calore e la sua interpretazione euristica come legge di evoluzione della concentrazione di una sostanza (o altra grandezza fisica) risiede nella legge dei grandi numeri. Supponiamo che la grandezza $c(x, t)$ rappresenti la concentrazione per unità di volume di una sostanza che diffonde in un mezzo, costituita da un numero N molto grande ($\sim 10^{23}$) di particelle identiche. Supponendo che tale sostanza sia molto diluita, possiamo trascurare l'interazione tra le particelle e supporre che esse siano sottoposte unicamente all'interazione con il mezzo. È inoltre ragionevole assumere che il moto di tali particelle non influenzi molto l'evoluzione del mezzo. Sotto tutte queste ipotesi, possiamo postulare che l'insieme delle posizioni $X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)}$ delle particelle siano N passeggiate aleatorie *indipendenti* ed ugualmente distribuite.

Ora, per la legge dei grandi numeri, se $N \rightarrow \infty$, le fluttuazioni nella frequenza di un evento su N prove indipendenti tendono a zero, ovvero tale frequenza tende (con probabilità uno) al suo valore atteso, che è pari alla probabilità dell'evento considerato. Quindi, in particolare, se $N_{a,b}(t)$ è il numero di particelle che si trovano in $[a, b]$ al tempo t , deve aversi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{a,b}(t)}{N} = \mathbb{P}(X_t^{(1)} \in [a, b]) = \int_a^b dx P^\varrho(x, t),$$

dove $\varrho(x)$ è la densità di probabilità al tempo $t = 0$ di ciascuna particella. Ma il limite a sinistra è pari alla frazione di sostanza contenuta nell'intervallo $[a, b]$ al tempo t . Pertanto, supponendo che la massa totale della sostanza sia normalizzata ad uno, ovvero $\int dx c(x, t) = 1$, tale limite deve essere uguale a $\int_a^b dx c(x, t)$. Concludiamo che $c(x, t) = P^\varrho(x, t)$, ovvero $c(x, t)$ è la soluzione dell'equazione del calore di dato iniziale $c(x, 0) = \varrho(x)$.

10.9. Soluzione di alcuni esercizi

SOLUZIONE ES. 10.1. Si ha (il coefficiente di diffusione è $D = 1$)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int dy \Gamma_1(x - y, t) y e^{-y^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int dy \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} - y^2\right) y \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int dy \exp\left(-\frac{x^2}{4t} + \frac{xy}{2t} - \frac{1+4t}{4t} y^2\right) y \\ &= \frac{2t}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \frac{\partial}{\partial x} \int dy \exp\left(\frac{xy}{2t} - \frac{1+4t}{4t} y^2\right) \\ &= \frac{2t}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{4t(1+4t)}\right) \sqrt{\frac{4\pi t}{1+4t}} \right] \\ &= \frac{x}{(1+4t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Infine } \bar{u}_k(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^k u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 3/2 \\ x/8 & \text{se } k = 3/2 \\ 0\chi_{\{0\}}(x) + \infty\chi_{\mathbb{R}_+}(x) - \infty\chi_{\mathbb{R}_-}(x) & \text{se } k > 3/2 \end{cases}$$

SOLUZIONE ES. 10.2. Si ha (il coefficiente di diffusione è $D = 1$)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int dy \Gamma_1(x - y, t) \cos y + \int_0^t ds \int dy \Gamma_1(x - y, t - s) e^{-s} \cos y \\ &= \Re \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int dy \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t} + iy\right) \\ &\quad + \int_0^t ds \frac{e^{-s}}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \Re \int dy \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4(t-s)} + iy\right) \\ &= \Re \left[e^{ix} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int dz \exp\left(-\frac{z^2}{4t} + iz\right) \right] \\ &\quad + \int_0^t ds e^{-s} \Re \left[e^{ix} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int dy \exp\left(-\frac{z^2}{4(t-s)} + iz\right) \right] \\ &= \Re e^{ix-t} + \int_0^t ds e^{-s} \Re e^{ix-(t-s)} = e^{-t} (1 + t) \cos x. \end{aligned}$$

SOLUZIONE ES. 10.3. Si ha (il coefficiente di diffusione è $D = 1$)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 1 + \int_0^t ds \int dy \Gamma_2(x - y, t - s) \sin s \sin y_1 \sin y_2 \\ &= 1 + \int_0^t ds \frac{\sin s}{4\pi(t-s)} \int dy \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4(t-s)}\right) \sin y_1 \sin y_2 \end{aligned}$$

L'integrale doppio rispetto alle variabili y fattorizza cosicché

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 1 + \int_0^t ds \frac{\sin s}{4\pi(t-s)} \Im \int dy_1 \exp\left(-\frac{|x_1 - y_1|^2}{4(t-s)} + iy_1\right) \\ &\quad \times \Im \int dy_2 \exp\left(-\frac{|x_2 - y_2|^2}{4(t-s)} + iy_2\right). \end{aligned}$$

Procedendo analogamente all'Esercizio 10.2 si ha infine

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 1 + \int_0^t ds \sin s \Im e^{ix_1-(t-s)} \Im e^{ix_2-(t-s)} = 1 + \sin x_1 \sin x_2 \int_0^t ds \sin s e^{2(s-t)} \\ &= 1 + \sin x_1 \sin x_2 \Im \int_0^t ds e^{2(s-t)+is} = 1 + \frac{2 \sin t - \cos t + e^{-2t}}{5} \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned}$$

SOLUZIONE ES. 10.4. La funzione armonica che soddisfa i dati al bordo è $\bar{u}(x) = (L - x)/L$, pertanto, essendo il coefficiente di diffusione $D = 1$, la soluzione formale

$$u(x, t) = \frac{L - x}{L} + \sum_{n \geq 1} c_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

con

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dy \left(\frac{y^2}{L^2} - \frac{y}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L} y \right) = \frac{2}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} dz \left(\frac{z^2}{n\pi} - z \right) \sin z \\
 &= -\frac{2}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} d \cos z \left(\frac{z^2}{n\pi} - z \right) = -\frac{2}{(n\pi)^2} \cos z \left(\frac{z^2}{n\pi} - z \right) \Big|_0^{n\pi} \\
 &\quad + \frac{2}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} dz \left(\frac{2z}{n\pi} - 1 \right) \cos z = -\frac{2}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} d \sin z \left(\frac{2z}{n\pi} - 1 \right) \\
 &= -\frac{2}{(n\pi)^2} \sin z \left(\frac{2z}{n\pi} - 1 \right) \Big|_0^{n\pi} + \frac{4}{(n\pi)^3} \int_0^{n\pi} dz \sin z = \frac{8}{(n\pi)^3} \times \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dunque

$$u(x, t) = \frac{L-x}{x} + \sum_{k \geq 0} \frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right).$$

SOLUZIONE ES. 10.5. Derivando la funzione $\tilde{u}(x) = -\frac{\tau_1}{2L}(x-L)^2 + \frac{\tau_2}{2L}x^2$ troviamo che

$$\tilde{u}'(0) = \tau_1, \quad \tilde{u}'(L) = \tau_2, \quad \tilde{u}''(x) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{L}.$$

Se cerchiamo la soluzione del problema nella forma $u(x, t) = \tilde{u}(x) + v(x, t)$ allora $v(x, t)$ risolve il problema di Cauchy-Neumann con forzante costante,

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + D \frac{\tau_2 - \tau_1}{L} & \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ v(x, 0) = g(x) - \tilde{u}(x) & \text{per } x \in [0, L], \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

che si risolve come descritto nell'Esempio 10.6.

Bibliografia

- [1] V.I. Arnold. *Lectures on Partial Differential Equations*. (Coll. Universitext) Berlin: Springer, 2004.
- [2] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Providence: A.M.S., 2004.
- [3] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Mosca: Edizioni MIR, 1980.
- [4] S. Salsa. *Equazioni a Derivate Parziali: Metodi, Modelli e Applicazioni*. (Coll. Unitext 45) Milano: Springer, 2010.
- [5] V.I. Smirnov. *Corso di Matematica Superiore II*. Roma : Editori Riuniti, 1977.
- [6] A.N. Tichonov, A.A. Samarkij. *Equazioni della fisica matematica*. Mosca: Edizioni MIR, 1981.
- [7] S. Vladimirov. *Equazioni della Fisica Matematica*. Mosca: Mir, 1987.