Prova pre-esonero - 20 aprile 2026
Corso di FM310

1. Risolvere l'equazione del trasporto lineare omogenea

$$\begin{cases} x^2 \partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x}. \end{cases}$$

Disegnarne schematicamente nel piano (x,t) le curve caratteristiche.

2. Risolvere l'equazione delle onde omogenea bidimensionale su $\Omega := (0,L)^2$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t) = 0, \\ u(\mathbf{x},0) = x_1 x_2 (L - x_1)(L - x_2), \qquad \partial_t u(\mathbf{x},0) = 0, \end{cases}$$

valida per $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$, con condizioni al bordo di Dirichlet: $u(\mathbf{x},t) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$.
Si discuta se tale soluzione è classica o debole nel senso delle distribuzioni.

3. Risolvere l'equazione delle onde non omogenea su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - 9\partial_x^2 u(x,t) = \cos x \\ u(x,0) = 0, \qquad \partial_t u(x,0) = x e^{-x^2}. \end{cases}$$

4. [Facoltativo] Si determini una distribuzione $J \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ che soddisfi l'equazione:

$$xJ' + J = 0.$$