ESONERO FM7 – A.A. 2009/2010

Dimostrare (in tutti i dettagli!) il seguente teorema di esistenza del limite termodinamico e equivalenza tra ensemble microcanonico e canonico.

Teorema. Sia $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ un potenziale a due corpi invariante per rotazioni e tale che: $v(\mathbf{q}) \geq 0$ e $v(\mathbf{q}) = 0$ per ogni $|\mathbf{q}| \geq r_0 > 0$. Allora esistono:

1. una funzione $\varepsilon_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, convessa su $[0, +\infty)$, con la proprietà che $\varepsilon_0(0) = 0$ e $\varepsilon_0(\rho) \geq 0$;
2. una funzione $\sigma : \Gamma \to \mathbb{R}$, concava su $\Gamma := \{(\rho, \varepsilon) : \rho \geq 0 \text{ e } \varepsilon > \varepsilon_0(\rho)\}$, strettamente crescente in ε a ρ fissato, e con la proprietà che $\sigma(0, \varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$;

tali che, per ogni $(\rho, \varepsilon) \in \Gamma$ e ogni $\beta > 0$,

$$\lim_{\substack{|\Lambda|\to\infty \\ N/|\Lambda|\to\rho \\ U/|\Lambda|\to\varepsilon}} \frac{1}{|\Lambda|} \log \mathcal{N}_0(N, U, \Lambda) = \sigma(\rho, \varepsilon)$$

$$\lim_{\substack{|\Lambda|\to\infty \\ N/|\Lambda|\to\rho}} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_N(\beta, \Lambda) = -\beta\psi(\rho, \beta) := -\beta \sup_{\varepsilon > \varepsilon_0(\rho)} \{\varepsilon - \beta^{-1}\sigma(\rho, \varepsilon)\} ,$$

dove

$$\mathcal{N}_0(N, U, \Lambda) := \frac{1}{N!} \int_{\mathbf{q}_i \in \Lambda} d\mathbf{q}_1 \cdots d\mathbf{q}_N d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N \; \chi(H_N \leq U) ,$$

$$Z_N(\beta, \Lambda) := \frac{1}{N!} \int_{\mathbf{q}_i \in \Lambda} d\mathbf{q}_1 \cdots d\mathbf{q}_N d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N \; e^{-\beta H_N} ,$$

dove Λ è un cubo di lato L e

$$H_N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N; \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) := \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{1\leq i<j\leq N} v(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) .$$