MA - Esame scritto (14-12-2015)

1. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla superficie di un cono di equazione

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2},$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato all'origine da una molla di costante elastica k.

(a) Si parametrizzi il cono usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \\ -\rho \end{pmatrix}$$

con $\rho = -z \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (ρ, θ) e delle loro derivate.

(b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

(c) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il corrispondente momento conservato L.

(d) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e L. Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$.

(e) Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano $\rho, \dot{\rho}$ e se ne disegni il grafico, per $L > 0$ fissato, al variare dell'energia E. Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile ρ.

(f) Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2\sinh^2 q},$$

con $q > 0$.

(a) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Si determinino l'Hamiltoniana $H(q,p)$ coniugata a $\mathcal{L}$ e le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana del sistema in $\widetilde{H}(Q,P) = P^2/2$. Si riconosca che

$$S(q,P) = P \log \tanh(q/2)$$

risolve tale equazione.

(d) Si scriva la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice $S(q,P)$ del punto precedente.

(e) Si risolvano le equazioni di Hamilton per la nuova Hamiltoniana $\widetilde{H}(Q,P) = P^2/2$, e si usi la trasformazione di cui al punto precedente per riesprimere la soluzione in termini delle variabili (q,p). Si verifichi che la soluzione così trovata risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.