12^o tutorato - MA - 20/5/2015

Esercizio 1 Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2q^2}\left[1 + \left(\frac{\dot{q}}{q^2}\right)^2\right]$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica puntuale tale che $Q = Q(q) = \frac{1}{2q^2}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Esercizio 2 Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica puntuale tale che $Q = Q(q) = \frac{q^3}{3}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

Esercizio 3 (Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico) Si consideri l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico (con $\omega = \sqrt{k/m}$)

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2.$$

1. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi che trasformi tale Hamiltoniana in $\tilde{H}(P) = E(P)$, con $E(P)$ un'opportuna funzione invertibile (che verrà definita nei prossimi punti).

2. Si riconosca che una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi ha la forma:

$$G(q,P) = \begin{cases} \int_{q_-}^{q} \sqrt{2m(E(P) - \frac{1}{2}m\omega^2(q')^2)}dq' & \text{se} \quad p > 0 \\ -\int_{q_-}^{q} \sqrt{2m(E(P) - \frac{1}{2}m\omega^2(q')^2)}dq' & \text{se} \quad p < 0 \end{cases}$$

   dove $q_- = q_-(E(P))$ è la radice negativa di $\frac{m}{2}\omega^2 q^2 = E(P)$, i.e., $q_- = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$.

3. Si scriva la trasformazione $p = p(q,Q)$, $Q = Q(q,P)$ generata da G. La funzione $E(P)$ va fissata in modo tale che i due rami di tale trasformazione su $p > 0$ e $p < 0$ si "incollino" bene in $p = 0$. Si riconosca che:

   (a) la trasformazione è continua in $(q,p) = (q_-, 0)$ (i.e., i due rami si incollano in modo continuo in tale punto);

   (b) in $(q,p) = (q_+, 0^+)$, con $q_+ = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, il ramo con $p > 0$ dà $Q = E'(P)T/2$, mentre in $(q,p) = (q_+, 0^-)$ il ramo con $p < 0$ dà $Q = -E'(P)T/2$, con

$$T = T(E(P)) = 2\int_{q_-}^{q_+} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E(P) - \frac{m\omega^2}{2}q^2)}}$$

   (c) imponendo che Q sia una variabile angolare (i.e., sia definita modulo 2π), si trova $E'(P) = 2\pi/T$. Mostrare che tale condizione implica che

$$P(E) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_E} p\, dq = E/\omega$$

   dove γ_E è la curva di livello corrispondente all'energia E (di equazione $H(p,q) = E$). La variabile P è nota come variabile di *azione*, coniugata all'*angolo* Q.

4. In corrispondenza della scelta di $E(P)$ fatta sopra, si determini esplicitamente la trasformazione canonica $q = q(Q,P)$, $p = p(Q,P)$, che è definita globalmente su tutto il piano delle fasi e definisce una trasformazione invertibile da $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\mathbb{T} \times (0, +\infty)$, con $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$. Si scriva esplicitamente anche l'espressione della trasformazione inversa $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$.

5. Si risolva l'equazione del moto per le variabili Q, P e si usi tale soluzione per ricavare la soluzione nelle variabili originali. Si riconosca che tale soluzione è quella usuale dell'oscillatore armonico.

Esercizio 4 Si consideri una lamina sottile di massa M e densità superficiale uniforme, la cui forma è un triangolo rettangolo con gli angoli al vertice $\pi/2$, $\pi/3$ e $\pi/6$.

1. Si determini la posizione del centro di massa.

2. Si calcolino gli assi e i momenti principali d'inerzia rispetto al vertice A, corrispondente all'angolo retto.

3. Si supponga di appendere la lamina al vertice A in presenza di gravità, e che la lamina sia libera di oscillare, mantenendo il punto A fisso, e rimanendo sempre nello stesso piano verticale. Si scriva la Lagrangiana del sistema, e si riconosca che le equazioni del moto sono equivalenti a quelle di un pendolo semplice, di lunghezza ℓ e massa m opportuni. Si calcolino ℓ ed m. Si identifichino le posizioni di equilibrio del corpo e il periodo delle piccole oscillazioni.

Esercizio 5 Si consideri una piramide retta a base quadrata di lato di base ℓ e altezza h. La piramide ha massa M e densità volumetrica costante.

1. Si determini la posizione del centro di massa.

2. Si calcolino gli assi e i momenti principali d'inerzia rispetto al centro di massa.

3. Si supponga di lanciare in aria la piramide con l'asse della piramide inizialmente verticale, i.e., in modo tale che all'istante $t = 0$ l'asse d'inerzia $\hat{\eta}_3$ coincida con l'asse verticale fisso $\hat{e}_3$. Si supponga che la velocità $\vec{v}_G(0)$ assegnata inizialmente al centro di massa abbia componente lungo $\hat{e}_3$ positiva, e che la velocità angolare $\vec{\omega}(0)$ attorno al centro di massa assegnata inizialmente al corpo giaccia sul piano orizzontale, i.e., $\omega_3 = 0$. Si determini il moto risultante, distinguendo il moto traslatorio del centro di massa e il moto rotatorio attorno al centro di massa.

Esercizio 6 Un cilindro omogeneo di massa M e raggio a rotola senza strisciare sulla superficie interna di un cilindro cavo di raggio interno R (vedi figura), il cui asse è in posizione orizzontale. Il cilindro di raggio a si muove sotto l'effetto della forza di gravità. Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\phi, \dot{\phi})$ (con ϕ scelto come in figura) e si risolva il moto per quadrature. Si identifichi il punto di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni.