

10° tutorato - MA - 4/5/2015

ESERCIZIO 1. Si calcolino i momenti principali di inerzia dei seguenti corpi rigidi rispetto al loro centro di massa:

1. Asta rigida sottile omogenea di lunghezza  $\ell$  e massa  $M$  [Risposta:  $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$ ,  $I_3 = 0$ ].
2. Disco sottile omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  [Risposta:  $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2$ ,  $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$ ].
3. Lamina quadrata sottile omogenea di lato  $\ell$  e massa  $M$  [Risposta:  $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$ ,  $I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$ ].
4. Cilindro circolare retto omogeneo di massa  $M$ , raggio  $R$  e altezza  $h$  [Risposta:  $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$ ,  $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$ ].
5. Sfera omogenea di massa  $M$  e raggio  $R$  [Risposta:  $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2$ ].

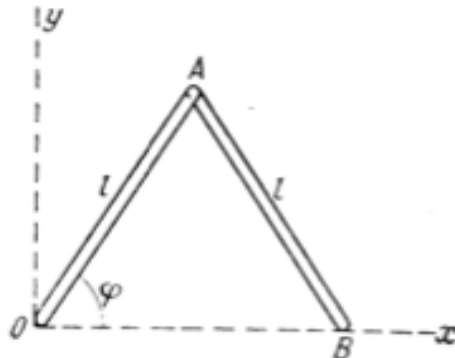
ESERCIZIO 2. Si dimostri il seguente teorema (Huygens-Steiner): Sia dato un corpo rigido con centro di massa  $G$  e distribuzione di massa  $\{\mathbf{q}_i, m_i\}$ . Assegnate due rette parallele  $r_0$  ed  $r_1$  in direzione  $\hat{\xi}$  e passanti la prima per  $G$  e la seconda per un punto  $P$ , vale la seguente identità:

$$I(r_1) = I(r_0) + Md^2$$

dove  $I(r_i) = \sum_i m_i \text{dist}^2(\mathbf{q}_i, r_i)$  è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto alla retta  $r_i$ , e  $d$  è la distanza tra  $r_0$  ed  $r_1$ .

ESERCIZIO 3. Un cilindro circolare retto omogeneo di massa  $M$ , raggio  $R$  e altezza  $h$  rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in modo tale che il suo centro di massa  $G$  ha coordinate  $(x(t), 0, R)$  ad ogni istante di tempo. Il centro di massa  $G$  è collegato da una molla di costante elastica  $k$  e centro  $(0, 0, R)$ . Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando  $x$  come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.

ESERCIZIO 4. Due asticelle sottili  $OA$ ,  $eAB$ , omogenee di lunghezza  $\ell$  e massa  $M$ , sono incernierate come in figura, in modo tale che abbiano un vertice comune  $A$ , il punto  $O$  sia fisso e il punto  $B$  si trovi sull'asse orizzontale  $x$ . Il sistema è soggetto alla forza peso. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando  $\varphi$  come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.



ESERCIZIO 5. Una lamina piana quadrata  $ABCD$ , omogenea, pesante, di massa  $M$  e lato  $\ell$ , è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici  $A$  e  $C$  della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica  $k$  e centri  $P_1 = (0, -d, 0)$  e  $P_2 = (0, d, 0)$ . Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate  $y$  e  $z$  del baricentro e l'angolo  $\theta$  che la diagonale  $AC$  forma con l'asse  $y$ , come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.

