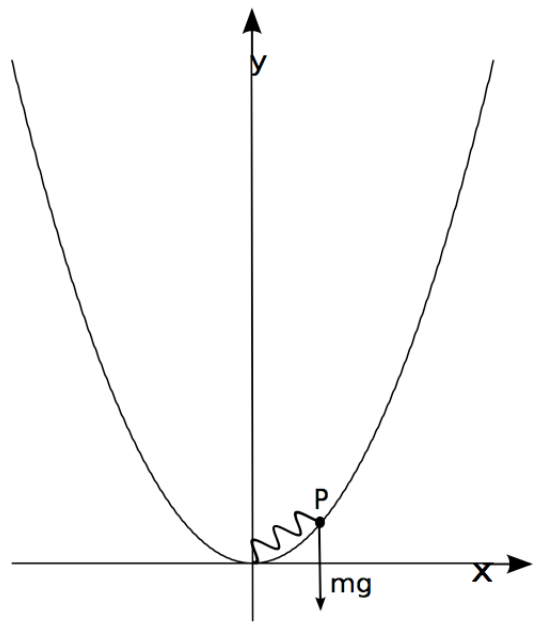
6^o tutorato - MA - 1/4/2015

Esercizio 1 (**Pendolo sferico**) Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso su una superficie sferica liscia (vincolo ideale) di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche:
$$\mathbf{x} = \ell \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\phi \\ \sin\alpha\sin\phi \\ 1-\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema vincolato, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\alpha, \phi, \dot\alpha, \dot\phi)$. Si noti che $\mathcal{L}$ è indipendente da ϕ (in questo caso si dice che ϕ è una variabile *ciclica*).
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo $A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}$.
4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza da $\dot\phi$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\alpha, \dot\alpha$ e di A nella forma $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\alpha^2 + V_{eff}(\alpha)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\alpha)$?
5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto della variabile α.
6. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Esercizio 2 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un paraboloide di equazione cartesiana $z = (x^2 + y^2)/\ell$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate polari sul piano orizzontale, i.e., usando coordinate ρ, θ tali che $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$.
2. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta)$. Si riconosca che θ è una variabile ciclica (i.e., $\mathcal{L}$ è indipendente da θ).
3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo, $A = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta}$, associato alla variabile ciclica.
4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot\theta$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot\rho$ e di A nella forma $E = (m/2)\dot\rho^2 F(\rho) + V_{eff}(\rho)$, dove $F(\rho) > 0$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?
5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
6. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.



Esercizio 3 Si consideri il sistema Lagrangiano costituito da un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi in un piano verticale (x, y), lungo il profilo di equazione $y = x^2/\ell_0$. Il punto è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'origine da una molla di costante elastica $k > 0$.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle coordinate $(x, \dot{x})$.

2. Si derivino le equazioni del moto sul vincolo.

3. Si identifichi una grandezza conservata.

4. Si risolva il moto per quadrature