

7° tutorato - MA - Prova Pre-Esonero - 8/4/2015

Esercizio 1 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi nel piano verticale xy (con x l'asse orizzontale e y l'asse verticale orientato verso l'alto), su una guida liscia rettilinea di equazione $y = x - \ell$, con ℓ una costante positiva. Oltre alla reazione vincolare (supposta ideale), la massa m è soggetta alla *forza peso* e a una *forza di richiamo* dovuta a una molla con un estremo nell'origine e lunghezza di riposo 2ℓ ; si supponga che tale forza di richiamo sia conservativa, con energia potenziale

$$U(\mathbf{x}) = A(|\mathbf{x}|^2 - 4\ell^2)^2, \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dove $A = mg/(12\ell^3)$, e g è l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la Lagrangiana \mathcal{L} del sistema vincolato, usando come coordinate Lagrangiane le variabili (x, \dot{x}) .
2. Si ricavano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette una grandezza conservata, da identificarsi con l'energia meccanica E .
3. Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi (x, \dot{x}) al variare di E e si discuta la natura qualitativa del moto.
4. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Esercizio 2 Una massa puntiforme m di coordinata $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si muove sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)$, con

$$V(\rho) = V_0 \left[\frac{\rho}{r_0} - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^4 \right],$$

e V_0, r_0 due parametri positivi.

1. Si identifichino le quattro grandezze conservate del sistema. Le si scrivano in termini delle coordinate polari (ρ, θ) sul piano su cui si svolge il moto.
2. Dopo aver identificato il potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$, se ne disegni il grafico, al variare del modulo del momento angolare $L > 0$ (si supponga che il momento angolare sia diverso da zero).
3. Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E e del modulo del momento angolare $L > 0$.
4. Si discuta la natura qualitativa del moto radiale e di quello complessivo.
5. Si esibisca una scelta di E, L e dei dati iniziali per cui il moto *complessivo* è periodico, e se ne calcoli il periodo.