8^o tutorato - MA - 15/4/2015

Premessa 1: Energia generalizzata. Data una Lagrangiana indipendente dal tempo $\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, l'**energia generalizzata**

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$$

è una grandezza conservata, infatti:

$$\frac{d}{dt}E = \ddot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \tag{1}$$

che è identicamente nullo, grazie alle equazioni di E-L: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}$.

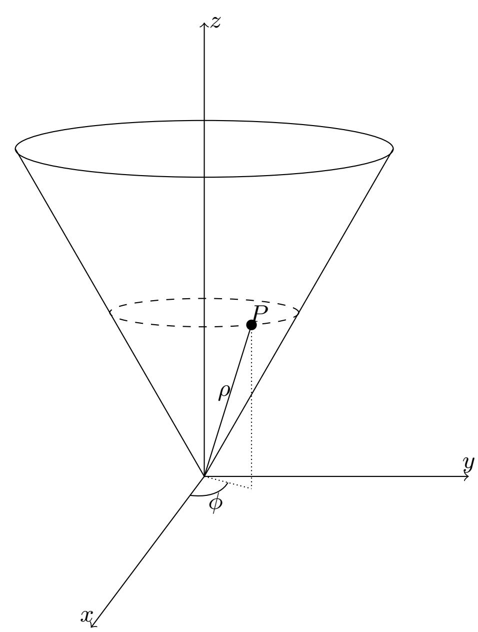
Se $\mathcal{L}$ è una Lagrangiana *meccanica*, i.e., è della forma (energia cinetica)−(energia potenziale): $\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q})$ con $A(\mathbf{q})$ una matrice definita positiva, allora E ha l'interpretazione di energia meccanica, i.e., è della forma (energia cinetica)+(energia potenziale): $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q})$.

Premessa 2: Variabili cicliche. Data una Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ (non necessariamente indipendente dal tempo), con $\mathbf{q} = (q_1,\dots,q_s)$, diremo che q_s (ad esempio) è una **variabile ciclica**, se $\mathcal{L}$ è *indipendente* dalla variabile q_s, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} = 0$. In tal caso, usando le equazioni di E-L, troviamo che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 0,$$

i.e., $p_s := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$ è una grandezza conservata. La grandezza conservata p_s si chiama **momento coniugato** a q_s.

Esercizio 1 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta_0 \in (0,\pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ, come in figura.

2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica ϕ, che chiameremo A.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Esercizio 2 (metodo di Routh)

1. Nel contesto dell'esercizio precedente, si verifichi che l'equazione di E-L per ρ associata alla Lagrangiana ridotta
$$\mathcal{L}_0(\rho, \dot{\rho}) := \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi})\big|_{\dot{\phi}=A/(m\rho^2 \sin^2\theta_0)}$$
ottenuta sostituendo il valore di $\dot{\phi}$ ricavato dalla conservazione di A, **non** coincide con quella associata a $\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi})$.

2. Si consideri la Lagrangiana ridotta
$$\mathcal{L}_R(\rho, \dot{\rho}) := \Big[\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi}) - \dot{\phi}A(\rho, \dot{\phi})\Big]\Big|_{\dot{\phi}=A/(m\rho^2 \sin^2\theta_0)}$$
dove $A = A(\rho, \dot{\phi}) = m\rho^2 \sin^2\theta_0 \dot{\phi}$ è l'espressione del momento coniugato A in termini di ρ e $\dot{\phi}$. Si verifichi che l'equazione di E-L per ρ associata a $\mathcal{L}_R$ è la stessa di quella ottenuta usando $\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\phi})$ e la conservazione di A.

3. Più in generale, si consideri una Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ indipendente da q_s, come nella Premessa 2. Grazie alla conservazione di p_s, la variabile $\dot{q}_s$ si può scrivere in funzione delle altre variabili:
$$\dot{q}_s = f(q_1, \ldots, \dot{q}_{s-1}, p_s, t)$$
per un'opportuna funzione f. Si dimostri che le equazioni di Eulero-Lagrange per le variabili $q_1, \ldots, q_{s-1}$ associate alla Lagrangiana ridotta
$$\mathcal{L}_R\big((q_1, \ldots, q_{s-1}), (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{s-1}), t\big) = \Big[\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - p_s\dot{q}_s\Big]\Big|_{\dot{q}_s = f(q_1, \ldots, \dot{q}_{s-1}, t)} \tag{2}$$
sono le stesse ottenute con la Lagrangiana originale, usando la conservazione di p_s. Il metodo di riduzione appena descritto si chiama **metodo di Routh**.