9^o tutorato - MA - 24/4/2015

Osservazione: le notazioni si riferiscono ai sistemi di riferimento disegnati a lezione.

Pendolo di Foucault Nel 6^o tutorato abbiamo studiato le oscillazioni del pendolo sferico, ovvero una massa m puntiforme vincolata a muoversi sotto l'effetto della sola forza peso $m\boldsymbol{g}_0$ su una superficie sferica liscia (vincolo ideale) di equazione cartesiana

$$|\boldsymbol{Q}|^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \ell^2, \text{ dove } \ell > 0.$$

Il pendolo di Foucault è un pendolo sferico soggetto, oltre che alla forza peso $m\boldsymbol{g}_0$, anche alle forze fittizie dovute alla rotazione della terra.

1. Dopo aver parametrizzato la superficie del vincolo usando le coordinate sferiche

$$\boldsymbol{Q} = \ell \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\phi \\ \sin\alpha\sin\phi \\ 1-\cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{1}$$

   si calcolino $\dot{\mathbf{Q}}$ e $\ddot{\mathbf{Q}}$.

2. Si scrivano, nella base $O'\hat{\boldsymbol{\eta}}_1\hat{\boldsymbol{\eta}}_2\hat{\boldsymbol{\eta}}_3$, i versori $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}}$ che generano il piano tangente alla superficie sferica nel punto identificato univocamente dalle coordinate sferiche α e ϕ e dal parametro ℓ.
   Si verifichi[1] ora che

$$\begin{cases} m\ddot{\boldsymbol{Q}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} = m\boldsymbol{g_0} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ m\ddot{\boldsymbol{Q}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\alpha}} = m\boldsymbol{g_0} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\alpha \end{cases} \tag{2}$$

   sono le equazioni di Eulero-Lagrange trovate nel 6^o tutorato.
   Osservazione: in questo modo abbiamo studiato il sistema trascurando le forze fittizie, ovvero considerando inerziale il sistema di riferimento $O'\hat{\eta}_1\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3$.

3. Consideriamo ora il sistema di riferimento $O'\hat{\eta}_1\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3$ come sistema di riferimento mobile (*i.e.* O' *è un punto sulla superficie terrestre. Immaginiamo la Terra come una sfera di raggio* $R_0 = |\boldsymbol{R}_0|$ *che ruota intorno al proprio asse con velocità angolare* ω.)

   - Scrivere le equazioni del moto tenendo conto delle forze fittizie.
   - Si identifichi la **forza di Coriolis** $\boldsymbol{F_c}$, e si ridefinisca l'accelerazione di gravità[2] $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{R}_0)$.

4. Si calcoli esplicitamente $\boldsymbol{F_c}$. In analogia a quanto fatto nel punto 2, si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange, proitettando l'equazione del moto sul piano generato dai versori $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ e $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$, nell'approssimazione di piccole oscillazioni e piccole velocità angolari (*i.e.* $\alpha \ll 1$ *e* $\dot{\alpha} \ll 1$).

5. Si risolva esplicitamente il problema nel seguente modo:

   - Si introduca la variabile complessa $z = \alpha e^{i\phi}$.
   - Usando le equazioni di Eulero- Lagrange, si verifichi che

$$\ddot{z} + 2i\omega\cos\theta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0,$$

     dove $\omega_0^2 = g/\ell$.

[1] Con il simbolo $\cdot$ si indica il prodotto scalare.
[2] Con il simbolo $\wedge$ si indica il prodotto vettoriale.

- Si risolva l'equazione differenziale appena trovata con condizioni iniziali $z(0) = \delta \in \mathbb{R}$ e $\dot{z}(0) = 0$.
- Si riconoscano, nella soluzione,
  - la frequenza di oscillazione del pendolo,
  - verso e periodo della precessione del piano di oscillazione.

Dati: l'accelerazione di gravità è $g = 9.81 m/s^2$, la velocità angolare terrestre $\omega \simeq 7.3 \cdot 10^{-5} rad/s$, $R_0 \simeq 6.4 \cdot 10^6 m$, la latitudine di Roma $\lambda = \pi/2 - \theta = 41^o N$.

Esercizio 2 Un sasso è lasciato cadere in un pozzo profondo ℓ alla latitudine λ. Di quanto si allontana dalla verticale?

Esercizio 3 Un punto materiale P di massa m è vincolato a moversi su un piano orizzontale π che si muove di moto rotatorio uniforme attorno a un asse verticale incidente il piano nel punto O. Il punto p è soggetto, oltre che alle forze fittizie indotte dal moto rotatorio del piano, anche ad una forza elastica $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{CP}$ con centro $C \neq O$ solidale al piano π.

1. Scrivere per componenti l'equazione vettoriale del moto di P nel riferimento solidale a π.
2. Determinare le eventuali posizioni di equilibrio del sistema.
3. Nei casi in cui esistono le posizioni di equilibrio, si risolva il moto esplicitamente e si discuta la stabilità dei punti fissi.