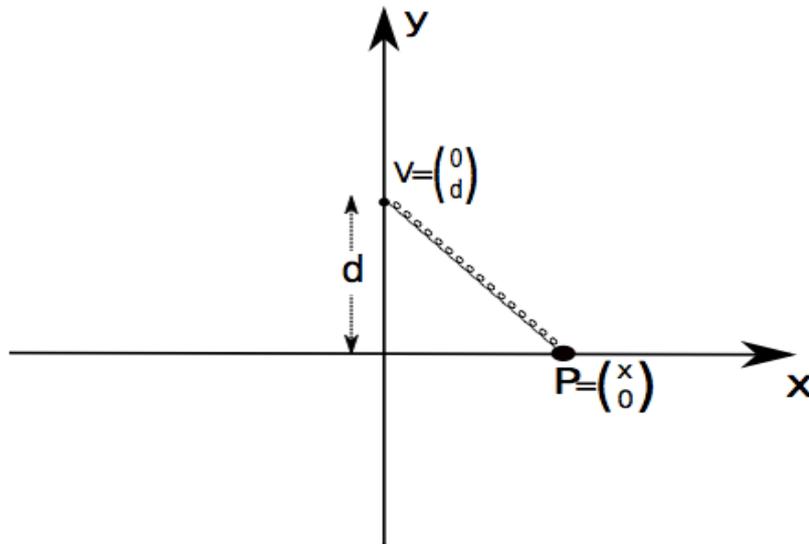


MA - Primo esonero (13-4-2015)

1. (12 punti). Una massa puntiforme  $m$  è vincolata a muoversi su un asse rettilineo orizzontale (asse  $x$ ) ed è soggetta (oltre alla reazione vincolare  $\mathbf{R}$ , da supporti ideale) a una forza elastica  $\mathbf{F}_e$ , esercitata da una molla di costante elastica  $k$ , lunghezza di riposo  $\ell$ , e fissata ad un estremo al punto  $V$  a distanza  $d < \ell$  dall'asse  $x$ .



Più esplicitamente, se  $\mathbf{r} = \overrightarrow{VP} \in \mathbb{R}^2$  è il raggio vettore dall'estremo fisso  $V$  della molla alla posizione  $P$  di  $m$  sull'asse  $x$ , si supponga che

$$\mathbf{F}_e = -k\hat{\mathbf{r}}(|\mathbf{r}| - \ell) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}U(\mathbf{r}), \quad U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k(|\mathbf{r}| - \ell)^2$$

dove  $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  è il versore associato a  $\mathbf{r}$ .

- Si scriva la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  del sistema vincolato, usando come coordinate Lagrangiane le variabili  $(x, \dot{x})$ , dove  $x$  è la coordinata di  $m$  sull'asse  $x$ , come in figura.
- Si ricavi l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente.
- Si dimostri che tale equazione ammette una grandezza conservata, da identificarsi con l'energia meccanica  $E$ .
- Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi  $(x, \dot{x})$  al variare di  $E$  e si discuta la natura qualitativa del moto.

2. (18 punti). Una massa puntiforme  $m$  di coordinata  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  si muove sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale  $U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)$ , con

$$V(\rho) = A_0 \frac{\rho^2}{\rho^2 + r_0^2},$$

e  $A_0, r_0$  due parametri positivi.

- (a) Supponendo che il momento angolare  $\mathbf{L}$  sia *diverso da zero*, si esprimano l'energia meccanica  $E$  e il modulo  $L$  del momento angolare in termini di  $\rho, \dot{\rho}$  e  $\dot{\theta}$ , dove  $(\rho, \theta)$  sono le coordinate polari sul piano ortogonale a  $\mathbf{L}$ , su cui si svolge il moto.
- (b) Dopo aver identificato il potenziale efficace  $V_{eff}(\rho)$ , se ne disegni il grafico qualitativo per valori del momento angolare

$$0 < L < \sqrt{2A_0 m r_0^2}.$$

- (c) Per tali scelte di  $L$ , si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi ridotto  $(\rho, \dot{\rho})$ , al variare dell'energia meccanica  $E$ .
- (d) Per tali scelte di  $L$ , si discuta la natura qualitativa del moto radiale e di quello complessivo, al variare di  $E$ .
- (e) Si esibisca una scelta dei dati iniziali per cui il moto *complessivo* è periodico, e se ne calcoli esplicitamente il periodo.