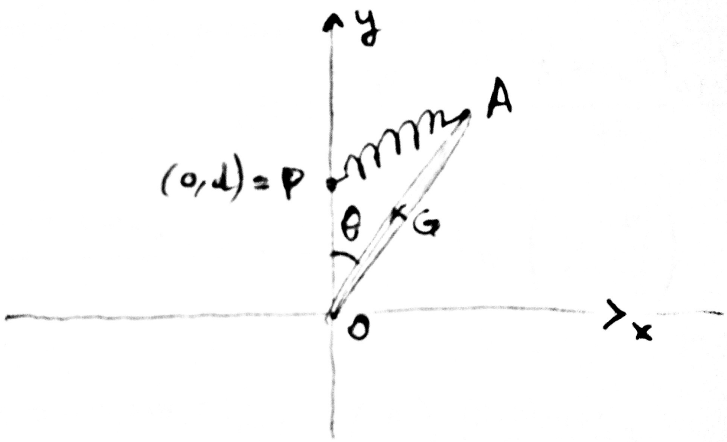
MA - Secondo esonero (29-5-2015)

1. Un'asticella sottile omogenea, di massa M e lunghezza ℓ è vincolata a ruotare senza attrito su un piano verticale, con uno dei suoi estremi mantenuto fisso. L'asticella è soggetta alla forza peso. Inoltre, sul suo estremo libero A, agisce una forza elastica di costante elastica k e centro $P = (0, d)$.



   (a) Si calcoli il momento d'inerzia I_3 attorno a un asse ortogonale all'asticella passante per l'estremo fisso O.

   (b) Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\theta, \dot{\theta})$, dove θ è l'angolo formato dall'asticella con l'asse verticale, come mostrato in figura. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente.

   (c) Si identifichino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità, al variare della distanza d del centro della molla da O.

   (d) Si disegnino i grafici del potenziale e delle curve di livello al variare del parametro d, e si discuta la natura qualitativa del moto.

   (e) **[Facoltativo]** Si supponga ora che la molla di centro P e attaccata in A abbia lunghezza di riposo $d_0 > 0$ (i.e., si supponga che la sua energia potenziale sia $\frac{1}{2}k(|\vec{AP}| - d_0)^2$. Si consideri, in particolare, il caso in cui $d = d_0 = 4r_0$ e $\ell = 2r_0$, con $r_0 = \frac{Mg}{2k}$. Si scriva la nuova Lagrangiana, l'equazione di Eulero-Lagrange, si disegnino i grafici del potenziale, e si discuta la natura qualitativa del moto.

2. (a) Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q^2\dot{q} - q^2$$

(b) Si determini l'Hamiltoniana e si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Per semplificare l'Hamiltoniana trovata, si usi una trasformazione di coordinate della forma

$$\begin{cases} Q = f(q) \\ P = p - q^2 \end{cases}$$

con $f(0) = 0$. Per quale scelta di $f(q)$ tale trasformazione è canonica?

(d) Si identifichi una funzione generatrice di seconda specie per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.

(e) Usando la trasformazione canonica $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$ trovata ai punti precedenti, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$ nelle nuove coordinate, si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e si riesprima la soluzione nelle variabili originali (q,p).