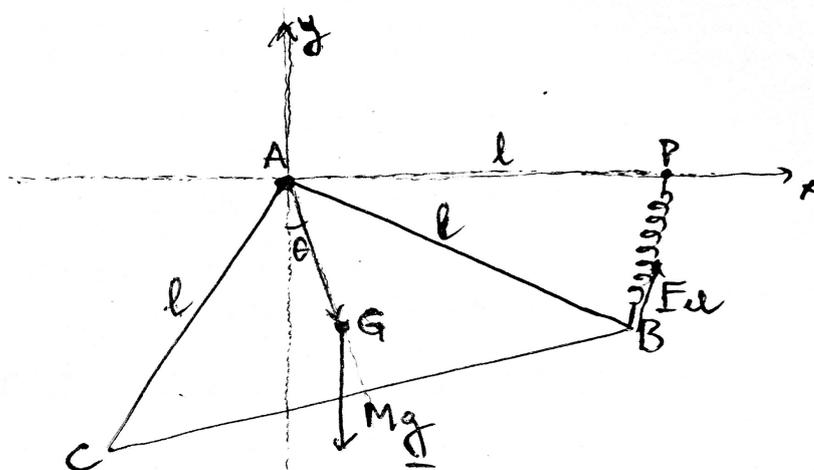


MA - Seconda prova pre-esonero (25-5-2015)

1. Una lamina sottile pesante, omogenea, di massa M , ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, i cui cateti AB e AC hanno lunghezza ℓ . La lamina è vincolata a oscillare in un piano verticale con il suo vertice A mantenuto fisso, ed è soggetta: (1) alla forza peso e (2) a una forza di richiamo elastica $\vec{F}_{el} = -k\vec{PB}$, di costante elastica k e centro $P = (\ell, 0)$.



- (a) Si determini la posizione del centro di massa G rispetto ad A .
- (b) Si calcoli il momento d'inerzia I_3 attorno a un asse ortogonale alla lamina e passante per A .
- (c) Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\theta, \dot{\theta})$, dove θ è l'angolo formato dal vettore \vec{AG} con l'asse verticale, come mostrato in figura. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.
- (d) Dopo aver disegnato il grafico qualitativo dell'energia potenziale e delle curve di livello, si risolva il moto per quadrature e se ne discuta la natura qualitativa. In particolare, si identifichino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

2. (a) Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$

sul quadrante $q, p > 0$. Trovare per quali valori di a e b è canonica.

- (b) Si determini l'inversa della trasformazione canonica determinata al punto (a), e si trovi una funzione generatrice di prima specie che la generi.
- (c) Si consideri l'Hamiltoniana $H(q, p) = \frac{1}{2}q^2p^2(\log q)^2$. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e si risolva il moto con dati iniziali $(q_0, p_0) = (e, \frac{1}{e})$, usando la trasformazione canonica trovata sopra¹.

¹Più precisamente, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle nuove coordinate, si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e le si risolvano in corrispondenza dei dati iniziali $Q_0 = Q(q_0, p_0)$, $P_0 = P(q_0, p_0)$, infine si usi la trasformazione inversa trovata al punto (b) per riesprimere la soluzione nelle variabili originali (q, p) .