MA - Primo scritto (12-6-2015)

1. Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi senza attrito su una guida uni-dimensionale di equazione $z' = (x')^3/\ell^2$ appartenente al piano verticale x'-z' di un sistema di riferimento (mobile) $x'y'z'$, il cui asse z' è verticale rivolto verso l'alto. Il sistema di riferimento $x'y'z'$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale rispetto al sistema di riferimento (fisso) del laboratorio xyz, in modo tale che: (i) le origini dei due sistemi di riferimento coincidano ad ogni istante, (ii) l'asse z' coincida con l'asse z ad ogni istante, (iii) i due sistemi di riferimento coincidano all'istante iniziale $t = 0$.

   (a) Si scriva la legge di trasformazione delle coordinate dal sistema di riferimento mobile a quello fisso, esprimendo le coordinate (x, y, z) in funzione di (x', y', z') e del tempo.

   (b) Si scriva l'equazione parametrica della guida uni-dimensionale nel sistema di riferimento fisso.

   (c) Si scriva la Lagrangiana per la massa puntiforme m, assumendo che la stessa sia soggetta (oltre che alle forze di reazione vincolare che la mantengono sulla guida) alla forza peso.

   (d) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente.

   (e) Si identifichi una grandezza conservata del moto, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

   (f) Si scriva l'equazione delle curve di livello associate alla grandezza conservata trovata al punto precedente, se ne disegni il grafico, e si discuta la natura qualitativa del moto risultante.

   (g) Si identifichino i dati iniziali per cui il moto (visto nel sistema di riferimento mobile) è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}\sin q)^2 - \cos^2 q$$

per $q \in (0,\pi)$.

(a) Si determini l'Hamiltoniana e si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(b) Si scriva la trasformazione canonica $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$ associata alla funzione generatrice (di seconda specie) $F(q,P) = P\cos q$, specificandone il dominio di invertibilità. Su tale dominio, si scriva esplicitamente la trasformazione inversa.

(c) Usando la trasformazione canonica trovata al punto precedente, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$ nelle nuove coordinate.

(d) Si risolvano le equazioni di Hamilton associate ad $\tilde{H}(Q,P)$, per un dato iniziale generico (Q_0,P_0).

(e) Nel contesto del punto precedente, si consideri il dato iniziale speciale corrispondente (nelle variabili originali) a $q(0) = \pi/4$, $\dot{q}(0) = \sqrt{2}$. Si esprima la soluzione in termini della variabile q, i.e., si determini esplicitamente la soluzione $q = q(t)$ corrispondente a tale dato iniziale.

(f) Si verifichi che la soluzione $q(t)$ trovata al punto precedente risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per $\mathcal{L}(q,\dot{q})$.