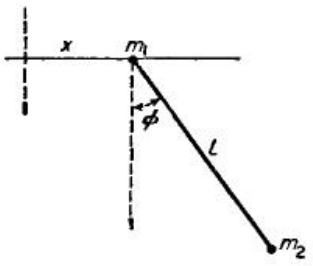
MA - Secondo scritto (10-7-2015)

1. Un pendolo è costituito da un'asticella di lunghezza ℓ e massa trascurabile e da due masse puntiformi m_1 ed m_2 ai suoi estremi. Il pendolo è libero di oscillare in un piano verticale per effetto della forza peso. In aggiunta, la massa m_1 può muoversi liberamente su una guida orizzontale che si trova nello stesso piano di oscillazione del pendolo.



   (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (x, ϕ) descritte in figura e delle loro derivate.

   (b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

   (c) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica, e si identifichi il momento conservato corrispondente (e si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{x}$ in termini di $A, \phi, \dot{\phi}$.

   (d) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{x}$ in termini di $A, \phi, \dot{\phi}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(\phi, \dot{\phi})$.

   (e) Si disegni il grafico delle curve di livello nel piano $(\phi, \dot{\phi})$ corrispondenti al moto della variabile angolare e se ne discuta la natura qualitativa.

   (f) Si identifichino i dati iniziali per cui il moto *complessivo* del sistema è periodico.

   (g) Si risolva il moto per quadrature.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = -\sqrt{1 - \dot{q}^2} + Eq,$$

con $q \in \mathbb{R}$, $|\dot{q}| < 1$ ed $E > 0$.

(a) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Si determinino l'Hamiltoniana $H(q, p)$ coniugata a $\mathcal{L}$ e le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Si risolvano le equazioni del moto con dati iniziali generici $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$.

(d) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi che mappi l'Hamiltoniana $H(q, p)$ in $\tilde{H}(Q, P) = P$.

(e) Si verifichi che, se $P + Eq \geq 1$, la funzione

$$S(q, P) = \frac{1}{E} f(P + Eq),$$

con

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$$

risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi.

(f) Si scriva la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice $S(q, P)$ del punto precedente.

(g) Si risolvano le equazioni di Hamilton per la nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P) = P$, e si usi la trasformazione di cui al punto precedente per riesprimere la soluzione in termini delle variabili (q, p). Si riconosca che la soluzione così trovata coincide con quella di cui al punto (c).