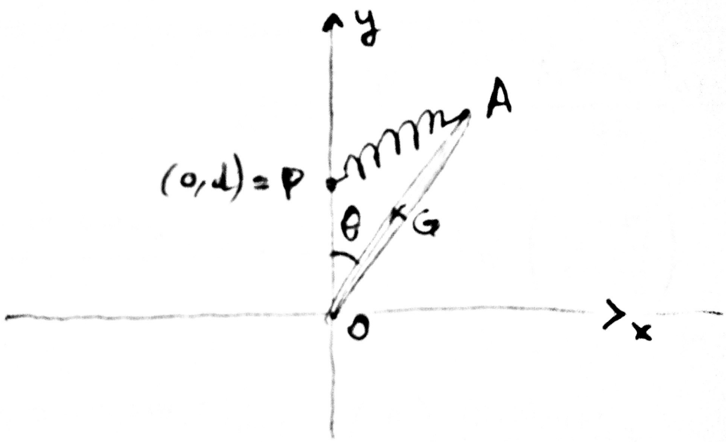
MA - Soluzioni del secondo esonero (29-5-2015)

1. Un'asticella sottile omogenea, di massa M e lunghezza ℓ è vincolata a ruotare senza attrito su un piano verticale, con uno dei suoi estremi mantenuto fisso. L'asticella è soggetta alla forza peso. Inoltre, sul suo estremo libero A, agisce una forza elastica di costante elastica k e centro $P = (0, d)$.



   (a) Si calcoli il momento d'inerzia I_3 attorno a un asse ortogonale all'asticella passante per l'estremo fisso O.

   (b) Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\theta, \dot{\theta})$, dove θ è l'angolo formato dall'asticella con l'asse verticale, come mostrato in figura. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente.

   (c) Si identifichino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità, al variare della distanza d del centro della molla da O.

   (d) Si disegnino i grafici del potenziale e delle curve di livello al variare del parametro d, e si discuta la natura qualitativa del moto.

   (e) **[Facoltativo]** Si supponga ora che la molla di centro P e attaccata in A abbia lunghezza di riposo $d_0 > 0$ (i.e., si supponga che la sua energia potenziale sia $\frac{1}{2}k(|\vec{AP}|^2 - d_0)^2$. Si consideri, in particolare, il caso in cui $d = d_0 = 4r_0$ e $\ell = 2r_0$, con $r_0 = \frac{Mg}{2k}$. Si scriva la nuova Lagrangiana, l'equazione di Eulero-Lagrange, si disegnino i grafici del potenziale, e si discuta la natura qualitativa del moto.

SOLUZIONE

(a) Il momento d'inerzia richiesto è

$$I_3 = \frac{M}{\ell}\int_0^\ell x^2 dx = \frac{1}{3}M\ell^2.$$

(b) L'energia cinetica dell'asticella è

$$T = \frac{1}{2}I_3\dot\theta^2.$$

L'energia potenziale gravitazionale è (notando che il centro di massa ha coordinate $G = \frac{\ell}{2}(\sin\theta, \cos\theta)$):

$$V_g(\theta) = Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta.$$

L'energia potenziale elastica è (notando che l'estremo libero dell'asticella ha coordinate $A = \ell(\sin\theta, \cos\theta)$, cosicché $\vec{PA} = (\ell\sin\theta, \ell\cos\theta - d)$):

$$V_e(\theta) = \frac{1}{2}k|\vec{PA}|^2 = \frac{1}{2}k(\ell^2 + d^2 - 2d\ell\cos\theta).$$

La Lagrangiana del sistema è quindi

$$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T - V_g - V_e = \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2 - Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + kd\ell\cos\theta + (\text{cost.})$$

dove la costante è irrilevante per la dinamica del sistema. L'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente è

$$\frac{1}{3}M\ell^2\ddot\theta = -k\ell\Big(d - \frac{Mg}{2k}\Big)\sin\theta = -V'(\theta),$$

con $V(\theta) = k\ell\Big(d - \frac{Mg}{2k}\Big)(1-\cos\theta)$.

(c) Se $d \neq \frac{Mg}{2k}$, i punti di equilibrio del sistema sono $\theta_0 = 0, \pi$, la cui stabilità dipende dal segno di $V''(\theta_0) = k\ell\Big(d - \frac{Mg}{2k}\Big)\cos\theta_0$: se il segno è positivo, allora l'equilibrio è stabile, e viceversa. Se $d > \frac{Mg}{2k}$, allora $V''(0) > 0$ e $V''(\pi) < 0$, quindi $\theta = 0$ è stabile, mentre $\theta = \pi$ è instabile. Se, viceversa, $d > \frac{Mg}{2k}$, allora $\theta = 0$ è instabile, mentre $\theta = \pi$ è stabile.

Rimane da trattare il caso $d = \frac{Mg}{2k}$. In tal caso $V(\theta) \equiv 0$ e tutti i punti del cerchio sono punti di equilibrio. In questo caso le soluzioni all'equazione del moto sono della forma $\theta(t) = a + bt$. Quindi, arbitrariamente vicino ad ogni punto di equilibrio si trovano dati iniziali (con b diverso da zero, ma piccolo a piacere) che escono in tempo finito da qualsiasi intorno prefissato del punto di equilibrio considerato: in conclusione, per $d = \frac{Mg}{2k}$ tutti i punti di equilibrio sono instabili.

(d) Per $d > \frac{Mg}{2k}$ il potenziale coincide con quello di un pendolo semplice: la forma qualitativa del potenziale e delle curve di livello sono quindi le stesse studiate a lezione nella teoria del pendolo, che qua non riportiamo (solo per brevità). Per $d < \frac{Mg}{2k}$ il potenziale è ottenuto rovesciando (i.e., cambiando segno) il potenziale del pendolo semplice. Il comportamento qualitativo delle curve di livello si ottiene traslano di π verso destra (o, equivalentemente, verso sinistra) le curve di livello del pendolo semplice. Infine, per $d = \frac{Mg}{2k}$, le curve di livello sono tutte rette orizzontali, percorse verso destra sul semipiano $\theta, \dot{\theta}$ superiore, e verso sinistra sul semipiano $\theta, \dot{\theta}$ inferiore.

(e) **[Facoltativo]** L'energia cinetica e potenziale gravitazionale sono le stesse calcolate al punto (b), mentre la nuova energia potenziale elastica è (a meno di una costante additiva)

$$V_e(\theta) = -kd\ell\cos\theta - kd_0\sqrt{\ell^2 + d^2 - 2d\ell\cos\theta}.$$

Quindi, la nuova Lagrangiana prende la forma

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 + k\ell\Big(d - \frac{Mg}{2k}\Big)\cos\theta + kd_0\sqrt{\ell^2 + d^2 - 2d\ell\cos\theta}$$

Nel caso in cui $d = d_0 = 4r_0$ e $\ell = 2r_0$, con $r_0 = \frac{Mg}{2k}$, tale Lagrangiana si riduce a

$$\mathcal{L} = \frac{2}{3}Mr_0^2\dot{\theta}^2 + 6kr_0^2\cos\theta + 8kr_0^2\sqrt{5 - 4\cos\theta}$$

L'energia potenziale è quindi $V(\theta) = -2kr_0^2\Big(3\cos\theta + 4\sqrt{5 - 4\cos\theta}\Big)$, il cui grafico è riportato in Fig.1.

Le curve di livello sono riportate in Fig.2.

I moti fuori dalle separatrici sono tutti periodici e consistono in oscillazioni attorno a uno dei minimi, o a entrambi i minimi, oppure oscillazioni complete sempre nello stesso verso, a seconda della

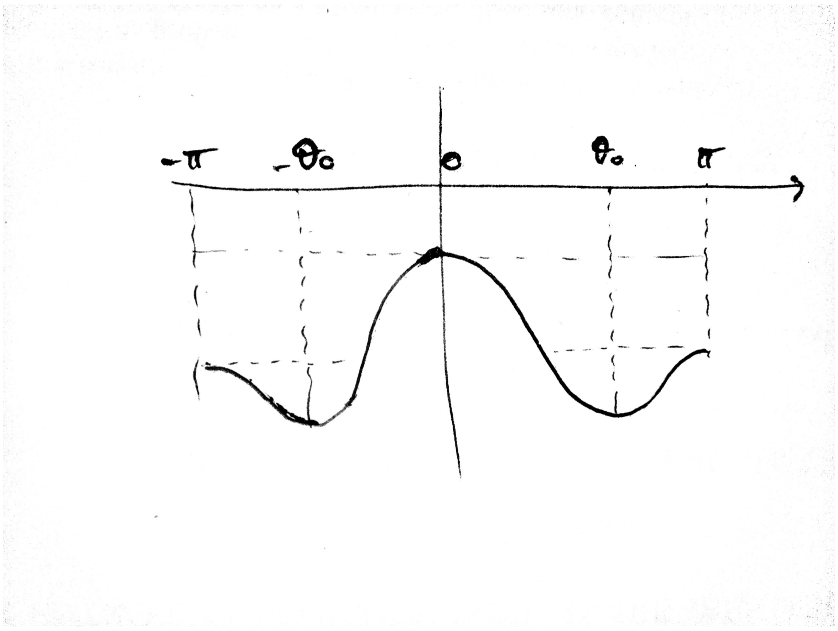


Figura 1: Grafico del potenziale (punto facoltativo). Il minimo è $\theta_0 = \arccos(-19/36)$

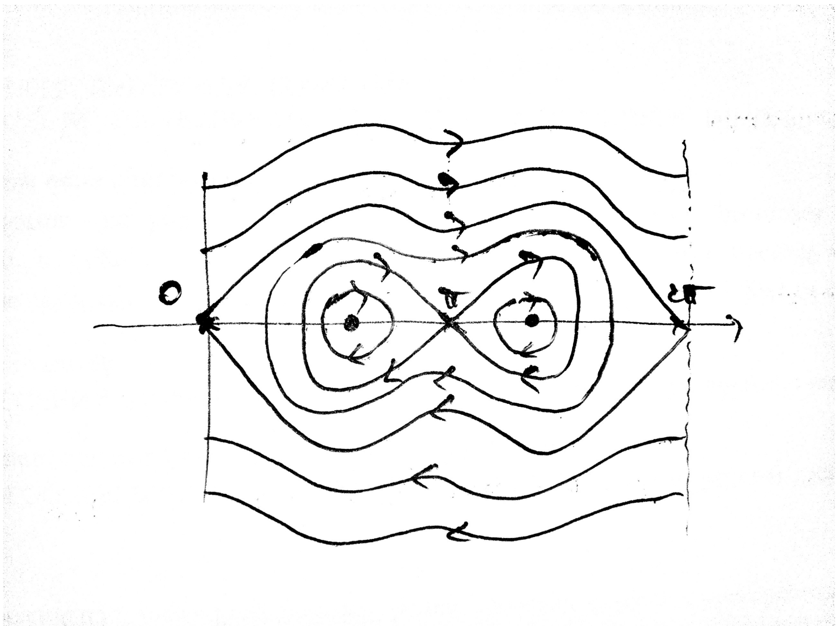


Figura 2: Curve di livello associate al potenziale $V(\theta)$ (punto facoltativo).

scelta dei dati iniziali. I moti sulle separatrici sono aperiodici, e tendono asintoticamente a uno dei punti di equilibrio instabili (0 o π).

2. (a) Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q^2\dot{q} - q^2$$

(b) Si determini l'Hamiltoniana e si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Per semplificare l'Hamiltoniana trovata, si usi una trasformazione di coordinate della forma

$$\begin{cases} Q = f(q) \\ P = p - q^2 \end{cases}$$

con $f(0) = 0$. Per quale scelta di $f(q)$ tale trasformazione è canonica?

(d) Si identifichi una funzione generatrice di seconda specie per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.

(e) Usando la trasformazione canonica $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$ trovata ai punti precedenti, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle nuove coordinate, si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e si riesprima la soluzione nelle variabili originali (q, p).

SOLUZIONE

(a) Il momento coniugato a q è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{q} + q^2$$

cosicché

$$H(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})\Big|_{\dot{q}=p-q^2} = \frac{(p - q^2)^2}{2} + q^2$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = p - q^2 \\ \dot{p} = (p - q^2)2q - 2q \end{cases}$$

(b) La condizione affinché la trasformazione sia canonica è che $\{Q, P\} = 1$, ovvero $f'(q) = 1$, che vuol dire (visto che $f(0) = 0$) che $f(q) = q$.

(c) La trasformazione canonica trovata al punto precedente è

$$\begin{cases} Q = q \\ P = p - q^2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} p = P + q^2 \\ Q = q \end{cases}$$

Affinché tale trasformazione sia generata da una funzione di seconda specie $F(q, P)$, dobbiamo imporre: $p = \partial F/\partial q$, e $Q = \partial F/\partial P$, che implica

$$F(q, P) = qP + \frac{q^3}{3}$$

(d) L'Hamiltoniana nelle nuove coordinate ha la forma:

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + Q^2$$

le cui equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = -2Q \end{cases}$$

che sono risolte da

$$Q(t) = A\cos(\sqrt{2}t + \alpha), \quad P(t) = -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2} + \alpha),$$

dove A, α sono due costanti, che dipendono dai dati iniziali. Ricordando che $q = Q$ e $p = P + Q^2$, troviamo finalmente la soluzione in termini di q e p:

$$q(t) = A\cos(\sqrt{2}t+\alpha), \quad p(t) = -\sqrt{2}A\sin(\sqrt{2}+\alpha)+A^2\cos^2(\sqrt{2}t+\alpha).$$