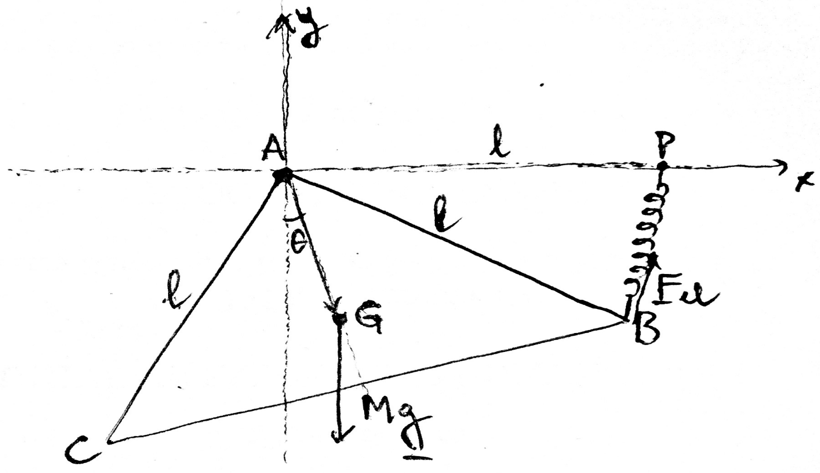
MA - Soluzioni della seconda prova pre-esonero (25-5-2015)

1. Una lamina sottile pesante, omogenea, di massa M, ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, i cui cateti AB e AC hanno lunghezza ℓ. La lamina è vincolata a oscillare in un piano verticale con il suo vertice A mantenuto fisso, ed è soggetta: (1) alla forza peso e (2) a una forza di richiamo elastica $\vec{F}_{el} = -k\,\overrightarrow{PB}$, di costante elastica k e centro $P = (\ell, 0)$.



   (a) Si determini la posizione del centro di massa G rispetto ad A.

   (b) Si calcoli il momento d'inerzia I_3 attorno a un asse ortogonale alla lamina e passante per A.

   (c) Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\theta, \dot{\theta})$, dove θ è l'angolo formato dal vettore $\overrightarrow{AG}$ con l'asse verticale, come mostrato in figura. Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

   (d) Dopo aver disegnato il grafico qualitativo dell'energia potenziale e delle curve di livello, si risolva il moto per quadrature e se ne discuta la natura qualitativa. In particolare, si identifichino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

SOLUZIONE

(a) Per calcolare la posizione del centro di massa, scelgo un sistema di riferimento (adattato alla lamina), tale che le coordinate dei tre vertici siano $A = (0,0)$, $B = (0,\ell)$, $C = (\ell, 0)$. In questo sistema di riferimento, la regione T occupata dal triangolo è $T = \{(x', y') : 0 \le x' \le \ell, 0 \le y' \le \ell - x\}$, cosicché le coordinate del centro di massa sono (ricordando che $\ell^2/2$ è l'area del triangolo):

$$x'_G = \frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell dx' x' \int_0^{\ell - x'} dy' = \frac{2}{\ell^2}\int_0^\ell dx' x'(\ell - x') = \frac{\ell}{3}$$

e $y'_G = x'_G$. Il centro di massa si trova quindi sull'asse che biseca l'angolo retto, a una distanza $d = \ell\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \ell\sqrt{2}/3$ dal vertice A.

(b) Usando lo stesso sistema di riferimento del punto precedente, troviamo

$$I_3 = \frac{2M}{\ell^2}\int_0^\ell dx' \int_0^{\ell - x'} dy' \big((x')^2 + (y')^2\big) = \frac{1}{3}M\ell^2.$$

(c) Si osservi che:

i. la coordinata verticale del centro di massa è $-d\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}\ell\cos\theta$, cosicché l'energia potenziale gravitazionale è $-\frac{\sqrt{2}}{3}Mg\ell\cos\theta$,

ii. il punto B ha coordinate

$$B = \ell\big(\cos(\frac{\pi}{4} - \theta), -\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)\big)$$

cosicché la lunghezza $|\vec{B}P|$ della molla è $|\vec{B}P| = \ell\sqrt{2 - 2\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}$ e l'energia potenziale elastica è

$$\frac{1}{2}k|\vec{B}P|^2 = k\ell^2\big(1 - \cos(\frac{\pi}{4} - \theta)\big) = k\ell^2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\Big).$$

La Lagrangiana del sistema è quindi

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}Mg\ell\cos\theta + \frac{k\ell^2}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta) - k\ell^2$$

la cui equazione di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{\theta} = -\sqrt{2}\frac{g}{\ell}\sin\theta + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{k}{M}(-\sin\theta + \cos\theta) = -V'(\theta),$$

dove l'energia potenziale efficace del sistema è

$$V(\theta) = -\sqrt{2}\frac{g}{\ell}\cos\theta - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{k}{M}(\cos\theta + \sin\theta).$$

(d) L'energia potenziale $V(\theta)$ ricavata sopra può essere riscritta come

$$V(\theta) = -A\cos\theta - a\sin\theta,$$

dove $A = \sqrt{2}\frac{g}{\ell} + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{k}{M}$ e $a = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{k}{M}$. Un modo conveniente di riscrivere $V(\theta)$ è il seguente:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -\sqrt{A^2+a^2}\Big(\frac{A}{\sqrt{A^2+a^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{A^2+a^2}}\sin\theta\Big) = \\ &= -\sqrt{A^2+a^2}\cos(\theta-\theta_0), \end{aligned}$$

dove $\theta_0 = \arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+a^2}}$. Il potenziale $V(\theta)$ è quindi lo stesso del pendolo semplice, a meno del fatto che l'argomento del coseno è $\theta - \theta_0$. Questo implica semplicemente che i grafici di $V(\theta)$ e delle curve di livello sono ottenuti traslando verso destra di θ_0 i grafici corrispondenti per il pendolo semplice (che qua non riportiamo, per brevità). In particolare, il sistema ammette due punti di equilibrio, $\theta = \theta_0$ (stabile) e $\theta = \theta_0 + \pi$ (instabile). Il coefficiente $\Omega^2 = \sqrt{A^2+a^2}$ ha l'interpretazione di quadrato della frequenza angolare delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile.

2. (a) Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$

sul quadrante $q, p > 0$. Trovare per quali valori di a e b è canonica.

(b) Si determini l'inversa della trasformazione canonica determinata al punto (a), e si trovi una funzione generatrice di prima specie che la generi.

(c) Si consideri l'Hamiltoniana $H(q,p) = \frac{1}{2}q^2p^2(\log q)^2$. Si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e si risolva il moto con dati iniziali $(q_0, p_0) = (e, \frac{1}{e})$, usando la trasformazione canonica trovata sopra[1].

SOLUZIONE

(a) La condizione affinché la trasformazione assegnata sia canonica è che $\{Q, P\} = 1$, ovvero

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{q}\big(- bp^{b-1} q \log q\big) - \frac{2a}{p}\big(- p^b(\log q + 1)\big) = 1$$

che implica

$$p^{b-1}\log q(2a - b) + 2ap^{b-1} = 1,$$

ovvero $2a = b = 1$. Con questa scelta delle costanti la trasformazione assegnata si riduce a

$$\begin{cases} Q = \log(pq) \\ P = -pq \log q \end{cases} \tag{1}$$

(b) Per determinare l'inversa della trasformazione (1), ricaviamo dalla prima equazione

$$pq = e^Q \tag{2}$$

che, sostituita nella seconda, ci dà

$$P = -e^Q \log q \quad \Longleftrightarrow \quad \log q = -Pe^{-Q}, \tag{3}$$

[1] Più precisamente, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$ nelle nuove coordinate, si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e le si risolvano in corrispondenza dei dati iniziali $Q_0 = Q(q_0,p_0)$, $P_0 = P(q_0,p_0)$, infine si usi la trasformazione inversa trovata al punto (b) per riesprimere la soluzione nelle variabili originali (q,p).

ovvero $q = e^{-Pe^{-Q}}$. Risostituendo tale relazione in $pq = e^Q$ troviamo $p = e^{Q+Pe^{-Q}}$, cosicché, in conclusione,

$$\begin{cases} q = e^{-Pe^{-Q}} \\ p = e^{Q+Pe^{-Q}} \end{cases} \tag{4}$$

Per identificare una funzione generatrice di questa trasformazione, cerchiamo una funzione $F(q,Q)$ tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,Q) \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q}(q,Q) \end{cases} \tag{5}$$

Combinando la (3) con la seconda delle (5), troviamo

$$P = -e^Q \log q = -\frac{\partial F}{\partial Q}(q,Q) \quad \Longrightarrow \quad F(q,Q) = e^Q \log q + f(q)$$

cosicché $p = \frac{\partial F}{\partial q}(q,Q) = \frac{e^Q}{q} + f'(q)$. Confrontando tale relazione con la (2) troviamo $f(q) = 0$. In conclusione, la funzione $F(q,Q) = e^Q \log q$ è una generatrice di prima specie della trasformazione canonica (1).

(c) Nelle nuove coordinate, l'Hamiltoniana assegnata prende la forma $\tilde{H}(Q,P) = P^2/2$, le cui equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$

che sono risolte da $Q(t) = Q_0 + P_0 t$, $P(t) = P_0$. Il dato iniziale assegnato, $(q_0, p_0) = (e, 1/e)$, viene mappato (usando le (1)) in $(Q_0, P_0) = (0, -1)$, cosicché $Q(t) = -t$, $P(t) = -1$, che, se risostituite nella (4), forniscone la soluzione cercata:

$$q(t) = e^{e^t}, \quad p(t) = e^{-t-e^t}.$$