Esercizio 1 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = x^3 - x$.

1. Scrivere esplicitamente l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.

2. Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

   (a) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.

   (b) Si identifichino due punti di equilibrio, $x_1 < x_2$, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia E_1, E_2 corrispondenti ai punti di equilibrio x_1, x_2.

   (c) Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare Σ_{E_1} e Σ_{E_2}, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E (una per $E > E_1$, una per $E_2 < E < E_1$, una per $E < E_2$).

   (d) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.

3. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

4. Si consideri il moto periodico ad energia nulla, $E = 0$. Trovare due costanti, T_1 e T_2, tali che il periodo T di tale moto sia stimato dall'alto e dal basso:

$$T_1 < T < T_2. \tag{1}$$

   a meno di un errore del 20%[1]. [**Suggerimento***: Si noti che la funzione integranda nell'integrale definito che definisce T è proporzionale a $1/\sqrt{x(1-x)(x+1)}$ e che sull'intervallo di definizione del moto periodico tale quantità si può stimare dal basso e dall'alto rimpiazzando $(x+1)$ con $(x_+ + 1)$ e $(x_- + 1)$, rispettivamente, dove $x_- = 0, x_+ = 1$ sono i punti di inversione del moto. In tal modo ci si riduce al calcolo di $\int_0^1 dx/\sqrt{x(1-x)}$, che si risolve col cambio di variabili $x = \sin^2 t$.*]

5. Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

SOLUZIONE

1. $V'(x) = 3x^2 - 1$, quindi l'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -3x^2 + 1 \tag{2}$$

   Per verificare che l'energia meccanica è conservata durante il moto, dobbiamo verificare che la sua derivata nel tempo è sempre nulla:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}V'(x) = \dot{x}(\ddot{x} + 3x^2 - 1) = 0 \tag{3}$$

   grazie all'equazione del moto (2).

[1] Ovvero tali che $\frac{M-m}{M+m} < 0.2$.

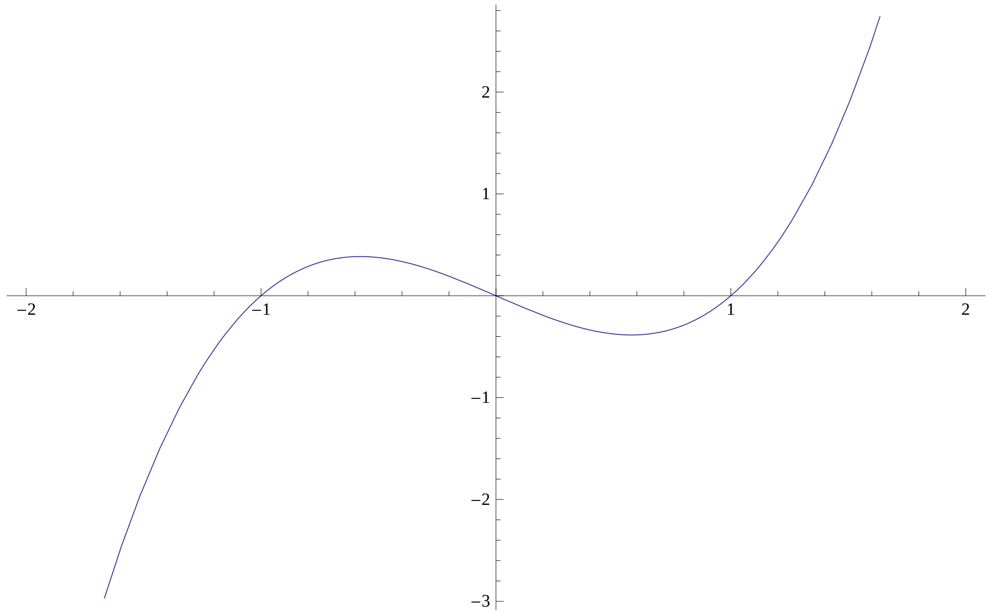

Figure 1: Grafico di $V(x) = x^3 - x$

2. (a) Per disegnare il grafico dell'energia potenziale dobbiamo studiare $V(x)$. $V(x) = 0$ nei punti $x_0 = 0$, $x_\pm = \pm 1$, e $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$. La sua derivata prima è

$$V'(x) = 3x^2 - 1 \begin{cases} > 0 \text{ se } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ = 0 \text{ in } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ < 0 \text{ se } x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases} \tag{4}$$

La derivata seconda

$$V''(x) = 6x \begin{cases} > 0 \text{ se } x > 0 \\ < 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Quindi il grafico del potenziale è quello di figura (1), con un massimo relativo in $x_1 = -1/\sqrt{3}$, e un minimo relativo in $x_2 = 1/\sqrt{3}$.

(b) Nei punti di massimo e minimo locale, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, il potenziale vale rispettivamente

$$\begin{aligned} V(x_1) &= +\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ V(x_2) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{6}$$

Per quanto discusso sopra, x_1 è un punto di *massimo locale non degenere (i.e., a derivata seconda negativa), quindi un punto di equilibrio instabile grazie al criterio del linearizzato*, mentre x_2 è un punto di *equilibrio stabile, grazie al teorema di Dirichlet.*

(c) Lo studio delle curve di livello fornisce grafici descritti in figura (2).

(d) Dallo studio del potenziale e delle curve di livello possiamo concludere che:

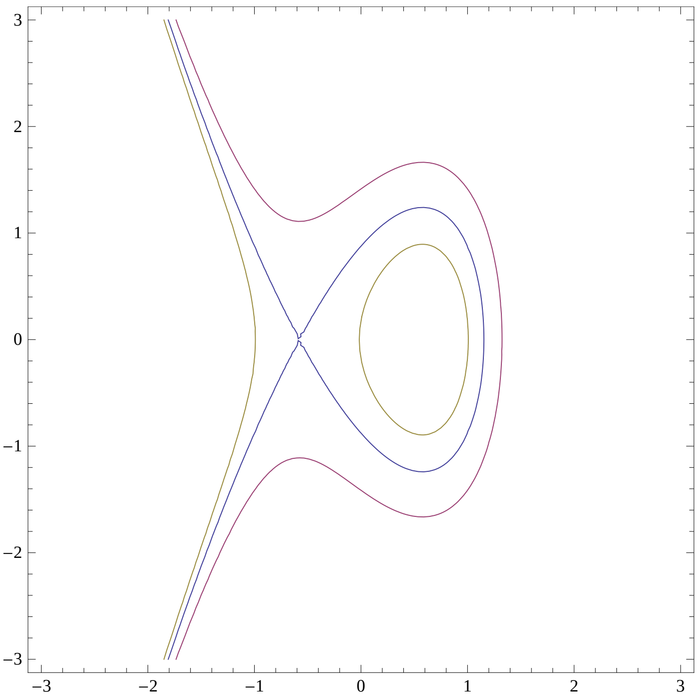

Figure 2: Curve di livello per valori di $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ per valori $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (separatrice,), $E = 1$ (moto aperto), $E = 1/64$ (moto chiuso e periodico se $x \in (x_1, x_2)$, aperto altrimenti).

- Se i dati iniziali sono di tipo $(\dot{x}_0, x_0) = (0, x_{eq})$, dove con x_{eq} si intende uno qualsiasi dei punti di equilibrio, il moto è costante.
- Per valori dell'energia $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e dati iniziali $x(0) > x_1$, i moti sono periodici chiusi.
- Per valori dell'energia $E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e dati iniziali $x(0) < x_1$ i moti sono aperti e aperiodici, e asintoticamente $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty$.
- Per valori dell'energia $E > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ i moti sono tutti aperti e aperiodici per qualsiasi scelta dei dati iniziali, e asintoticamente $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty$.
- In corrispondenza del valore critico dell'energia $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ i moti non banali sono tutti a-periodici, e possono essere limitati se $x(0) > x_1$ (in tal caso la traiettoria coincide con l'occhiello della separatrice in figura e il moto è asintotico sia nel futuro che nel passato a x_1, i.e., $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = x_1$) o illimitati se $x(0) < x(1)$ (in tal caso la traiettoria coincide con uno dei due rami della separatrice che si dipartono verso sinistra dal punto di equilibrio instabile; il ramo superiore/inferiore corrisponde a un moto asintotico nel futuro/passato a x_1).

3. Scegliamo $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. L'equazione $E = V(x)$ ha tre soluzioni, e chiamiamo $x_E^{(-)} < x_E^{(+)}$ le due soluzioni $x_E^{(\pm)} \in (x_1, x_2)$. Allora

$$t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}) = \int_{t(x_E^{(-)})}^{t(x_E^{(+)})} dt = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} \tag{7}$$

Come visto a lezione, il periodo T del moto periodico è la somma del tempo di andata e di quello di ritorno, ovvero $T = 2(t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}))$, quindi

$$T = \sqrt{2} \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{(E - x^3 + x)}} \tag{8}$$

4. Ricordando che gli zeri del potenziale sono $0, \pm 1$, troviamo che i punti di inversione del moto periodico a energia nulla sono $x_0^{(-)} = 0$ e $x_0^{(+)} = 1$. Il suo periodo, scrivendo

$$V(x) = x(x-1)(1+x) \tag{9}$$

è della forma (cfr. con la (8) e ricorda che $E = 0$)

$$T = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}} \tag{10}$$

Nel denominatore di tale espressione stimiamo dall'alto e dal basso il fattore $(1+x)$ come: $1 \le (1+x) \le 2$, che implica

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \le T \le \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{11}$$

L'integrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ si calcola per sostituzione $x = \sin^2 t$, con t che varia da 0 a $\pi/2$ per x varia da 0 e 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t(1 - \sin^2 t)}} = \pi.$$

Sostituendo nella (11) troviamo quindi

$$T_1 \equiv \pi \le T \le \sqrt{2}\pi \equiv T_2$$

che è della precisione desiderata, poiché

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2} = 0.17 \cdots < 0.2$$

5. Fissiamo $E > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_E, 0)$, dove x_E è l'unica radice di $V(x) = E$. La soluzione per quadrature, per $t > 0$ è

$$\int_{x(t)}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{2(E - x^3 + x)}} = t$$

Il tempo $t_{-\infty}$ necessario perché $x(t)$ raggiunga $-\infty$ è

$$t_{-\infty} = \int_{-\infty}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{2(E + x - x^3)}} \tag{12}$$

Per $x \to -\infty$ la funzione integrando si comporta asintoticamente come $|x|^{-3/2}$ (nel senso che il rapporto tra la funzione integranda e $|x|^{-3/2}$ ammette limite finito per $x \to -\infty$), che è integrabile per $x \to -\infty$. Quindi $t_{-\infty} < +\infty$ e il moto non è definito globalmente, ma soltanto per $t \in (-t_{-\infty}, t_{-\infty})$.

Esercizio 2 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto a un potenziale $V(\theta)$

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta) \tag{13}$$

dove $V(\theta) = \omega^2(1 - \cos\theta)$, $\omega \in \mathbb{R}$ (modello del *pendolo matematico*). A complemento della soluzione per quadrature discussa a lezione, si studi in dettaglio il moto sulla separatrice:

1. Si fissi l'energia al valore critico $E = 2\omega^2$, e si fissi un dato iniziale arbitrario sul ramo superiore della curva di livello critica (e.g., $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 2\omega)$).
2. Si scriva la soluzione per quadrature (a priori in forma implicita) e si risolva esplicitamente l'integrale definito coinvolto.
3. Si inverta la funzione così calcolata e si scriva la soluzione *esplicita* per il moto sulla separatrice. Si noti che il moto è definito globalmente, e che nel limite $t \to \pm\infty$ il moto tende al punto di equilibrio instabile.

SOLUZIONE
Poichè siamo sul ramo superiore della curva di livello critica,

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2(2\omega^2 - \omega^2(1 - \cos\theta))}}. \tag{14}$$

Fissiamo come suggerito $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 2\omega$. Allora

$$t = \int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\omega^2(1 + \cos\theta))}} = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}} = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \tag{15}$$

dove abbiamo usato nell'ultimo passaggio l'identità trigonometrica $\cos^2(\theta/2) = \frac{1+\cos\theta}{2}$.
Tramite il cambio di variabile $\theta/2 = x$, $d\theta = 2dx$ riscriviamo l'ultimo integrale come

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\theta(t)/2} \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\theta(t)/2} \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\theta(t)/2} \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} \tag{16}$$

Osservando ora che

$$\frac{1}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}\right] \tag{17}$$

otteniamo

$$t = \frac{1}{\omega}\int_0^{\theta(t)/2} \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2\omega}\log\left(\frac{1 + \sin y}{1 - \sin y}\right)\Bigg|_0^{\theta(t)/2} = \frac{1}{2\omega}\log\left(\frac{1 + \sin(\theta(t)/2)}{1 - \sin(\theta(t)/2)}\right) \tag{18}$$

da cui

$$\frac{1 + \sin(\theta(t)/2)}{1 - \sin(\theta(t)/2)} = e^{2\omega t} \quad \Longrightarrow \quad \sin\frac{\theta(t)}{2} = \frac{e^{2\omega t} - 1}{e^{2\omega t} + 1} = \tanh\omega t \tag{19}$$

invertendo la quale otteniamo la soluzione:

$$\theta(t) = 2\arcsin(\tanh\omega t) \tag{20}$$

che è definita globalmente, ed è tale che $\lim_{\pm\infty}\theta(t) = \pm\pi$.

Esercizio 3 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$.

- Scrivere esplicitamente l'equazione del moto. Si esibisca una quantità conservata del moto.
- Studiare qualitativamente il moto:
  1. Disegnare il grafico di $V(x)$
  2. Disegnare le curve di livello al variare del valore della quantità conservata.
  3. Identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
  4. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- Si risolva *esplicitamente* il moto sulla separatrice
- Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

SOLUZIONE

1. L'equazione del moto è
$$\ddot{x} = x^3 - x \tag{21}$$
Si verifica immediatamente che l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ è una costante del moto, infatti
$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\dot{x} - x^3\dot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} - (x^3 - x)) = 0 \tag{22}$$
usando (21).

2. Innanzitutto dobbiamo trovare i punti di equilibrio, ovvero i punti in cui si annulla la derivata del potenziale:
$$V'(x) = -x^3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pm 1. \tag{23}$$
Quindi: Esistono tre punti di equilibrio: $(x(0), \dot{x}(0)) = (0,0), (\pm 1, 0)$. Inoltre
$$V'(x) = x(1-x^2) \begin{cases} > 0 \text{ se } 0 < x < 1 \text{ oppure } x < -1 \\ < 0 \text{ se } \ -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1 \end{cases} \tag{24}$$
e $V''(x) = -3x^2 + 1$, cosicché $V''(0) = 1 > 0$, $V''(\pm 1) = -2 < 0$, quindi
   - $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile (teorema di Lyapunov),
   - $(\pm 1, 0)$ sono due punti di equilibrio instabili (criterio del linearizzato).

   I grafici delle curve di livello hanno la forma descritta in figura (4).

   Essendo $V(0) = 0$, $V(\pm 1) = \frac{1}{4}$, otteniamo che:
   - Se il sistema parte con velocita nulla su uno dei punti di equilibrio, allora il moto è costante.
   - Se $E > \frac{1}{4}$ i moti sono aperti per tutti i dati iniziali.
   - Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| < 1$, il moto è periodico intorno al minimo del potenziale.

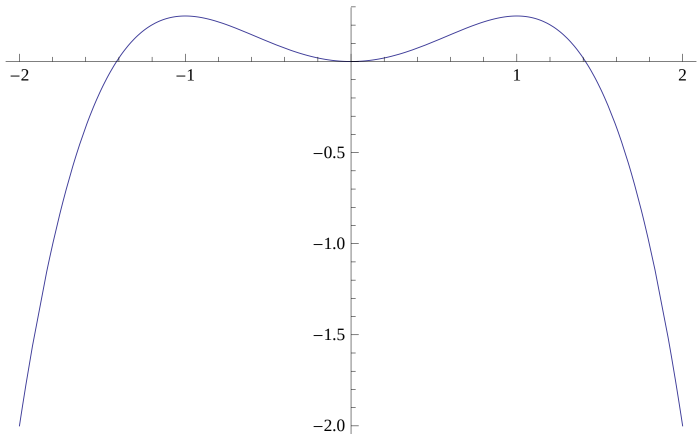

Figure 3: Grafico di $V(x) = -x^4/4 + x^2/2$

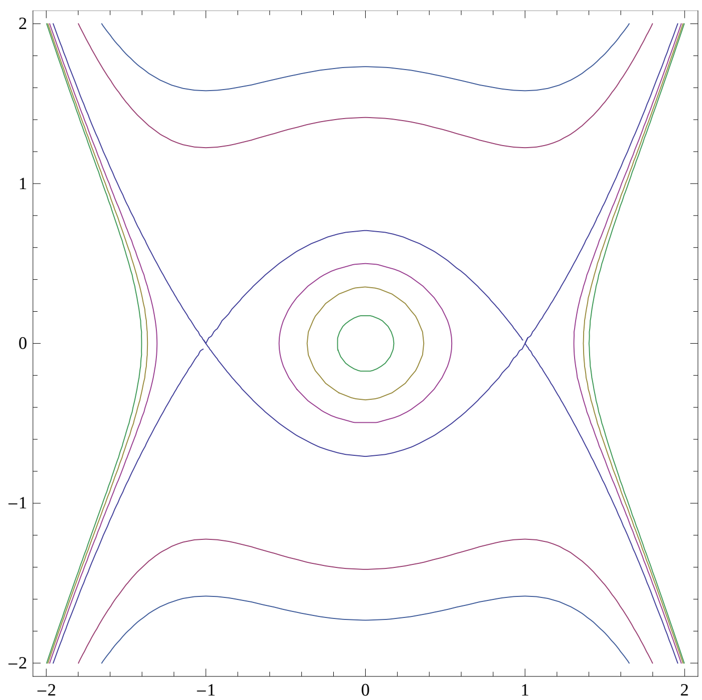

Figure 4: Curve di livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$

- Se $0 < E < \frac{1}{4}$ e $|x| > 1$, il moto è aperto.
- Se $E = 1/4$ e $x(0) \in (-1, 1)$ il moto è limitato e a periodico, e asintotico nel passato e nel futuro a ± 1, a seconda del valore iniziale della velocità (se $\dot{x}(0) > 0$, allora $\lim_{t\to\pm\infty} = \pm 1$, e viceversa). Se $E = 1/4$ e $x(0) < -1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a -1, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia negativa/positiva. Se $E = 1/4$ e $x(0) > 1$ il moto è aperto, e asintotico nel passato/futuro a 1, a seconda che $\dot{x}(0)$ sia positiva/negativa.

Consideriamo $0 < E < \frac{1}{4}$, e chiamiamo $x_E^{(\pm)}$ le due soluzioni dell'equazione $E = V(x)$ tali che $x_E^{(\pm)} \in (-1, 1)$. Allora, il tempo che la paricella impiega per arrivare da $x_E^{(-)}$ a $x_E^{(+)}$ è

$$t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)}) = \int_{t(x_E^{(-)})}^{t(x_E^{(+)})} ds = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_E^{(-)}}^{x_E^{(+)}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}. \tag{25}$$

Per calcolare il periodo del moto dobbiamo sommare il tempo di andata e quello di ritorno, quindi

$$T = 2[t(x_E^{(+)}) - t(x_E^{(-)})] = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \sqrt{2}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \tag{26}$$

3. Fissiamo $E = \frac{1}{4}$, e un qualsiasi dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0)$ sul ramo superiore della curva critica, ad es $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 1/\sqrt{2})$. Allora

$$t = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(\frac{1}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})}} \tag{27}$$

Osservando che $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2$ e che $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ poiché $-1 < x < 1$ sul ramo di curva di livello di interesse, possiamo riscrivere l'integrale come

$$t = \sqrt{2}\int_0^{x(t)} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{x(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\right) \tag{28}$$

che può essere invertita in

$$x(t) = \frac{e^{\sqrt{2}\,t} - 1}{e^{\sqrt{2}\,t} + 1} = \tanh\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{29}$$

4. Consideriamo un moto a energia nulla aperto, ad es quello con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (\sqrt{2}, 0)$.

$x(0) > 1$. Il tempo per raggiungere l'infinito è

$$t_\infty = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})}} \tag{30}$$

Per $x \to \infty$ la funzione integrando si comporta asintoticamente come $\sqrt{2}/x^2$, che è integrabile all'infinito. Quindi $t_\infty < +\infty$ e il moto non esiste globalmente ma solo per $t \in (-t_\infty, t_\infty)$.

Esercizio 4 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$.

- Scrivere esplicitamente l'equazione del moto. Si esibisca una quantità conservata del moto.
- Studiare qualitativamente il moto:
  1. Disegnare il grafico di $V(x)$
  2. Disegnare le curve di livello al variare del valore della quantità conservata.
  3. Identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
  4. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

SOLUZIONE

1. L'equazione del moto è $\ddot{x} = xe^{x^2}$. Si verifica immediatamente che l'energia meccanica è conservata, infatti

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}e^{x^2} \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{x}\ddot{x} - x\dot{x}e^{x^2} = \dot{x}(\ddot{x} - xe^{x^2}) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

2. Notiamo prima di tutto che $V(x) \leq -1/2$ per ogni x. Inoltre

$$V'(x) = -xe^{x^2} \begin{cases} > 0 \text{ se } x < 0 \\ = 0 \text{ se } x = 0 \\ < 0 \text{ se } x > 0 \end{cases} \tag{32}$$

e

$$V''(x) = -e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} < 0 \text{ per ogni } x \tag{33}$$

Quindi l'unico punto fisso del sistema è $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, ed è un punto di equilibrio instabile. Per tutti gli altri dati iniziali, i moti sono moti aperti, non ci sono moti periodici. I grafici del potenziale e delle curve di livello sono nelle figure (5) e (6).

3. Scegliamo ad esempio un dato iniziale con $E > -1/2$ e $x(0) = 0$. Allora il tempo per arrivare a infinito è

$$t_\infty = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2E + e^{x^2}}} < \infty \tag{34}$$

quindi il sistema raggiunge l'infinito in un tempo finito: il moto non esiste globalmente, ma solo nell'intervallo $t \in (-t_\infty, t_\infty)$

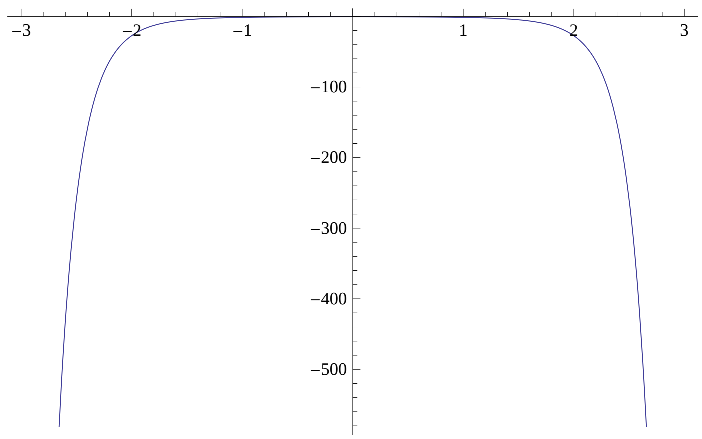

Figure 5: Grafico di $V(x) = -\frac{e^{x^2}}{2}$

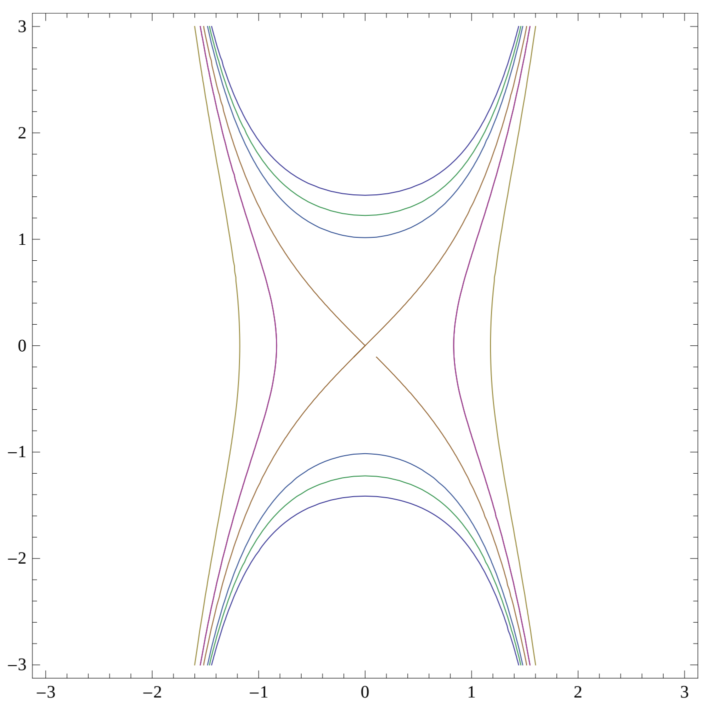

Figure 6: Grafico delle curve li livello per diversi valori di $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.