Osservazione preliminare. Per la soluzione degli esercizi è utile ricordare che la soluzione dell'equazione differenziale non omogenea del prim'ordine

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + b(t)$$

con dato iniziale $x(0) = x_0$ è

$$x(t) = e^{\lambda t}\Big(x_0 + \int_0^t e^{-\lambda\tau} b(\tau) d\tau\Big) \tag{1}$$

cosa che useremo varie volte nel seguito.

Suggerimento per la soluzione della domanda facoltativa dei primi due esercizi Nel caso in cui gli autovalori delle matrici sono uguali e valgono λ, invece di ridurre la matrice A alla sua forma diagonale (come nel caso diagonalizzabile) la riduciamo alla sua forma normale di Jordan, ovvero cerchiamo P invertibile tale che

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2}$$

La base in cui A assume tale forma è $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, con $\mathbf{v}_2$ autovettore con autovalore λ, e $\mathbf{v}_1$ autovettore generalizzato tale che $(A - \lambda\mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. A questo punto basta osservare che

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} = PJP^{-1}\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Se definiamo $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, il sistema diventa

$$\dot{\boldsymbol{y}} = J\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

per risolvere il quale basta procedere come nell'esercizio 5.

Esercizio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & \alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

A causa del primo elemento della seconda riga, la matrice è definita solo per i valori del parametro $\alpha \neq 0$.

1) L'equazione $det(A - \lambda\mathbb{1}) = (1 - \lambda)(\alpha - \lambda) - \alpha = 0$ è verificata per $\lambda = \lambda_{0,1}$ dove $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 + \alpha$. Quindi

- per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ i due autovalori sono reali e *distinti* $\Rightarrow$ la matrice A è *diagonalizzabile.* Per trovare i suoi autovettori, consideriamo un vettore generico $\eta = (u, v)^T$ e vediamo per quali valori di u e v soddisfa l'equazione secolare $A\boldsymbol{x} = \lambda_{0,1}\boldsymbol{x}$, ovvero il sistema

  $$\begin{cases} u + \alpha^2 v = \lambda_{0,1} u \\ \frac{1}{\alpha} u + \alpha v = \lambda_{0,1} v \end{cases} \tag{6}$$

  Gli autovettori possono essere scelti come

  $$\eta_0 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \eta_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

- per $\alpha = -1, \lambda_0 = \lambda_1 =: \lambda = 0$. La matrice A ammette un unico autovettore $\eta_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi non è diagonalizzabile.

2) Consideriamo il caso $\alpha \neq -1$. La soluzione generale del sistema ha la forma

$$\mathbf{x}(t) = a_0 e^{\lambda_0 t}\eta_0 + a_1 e^{\lambda_1 t}\eta_1 = a_0 \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 e^{(1+\alpha)t} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

con a_0, a_1 due parametri reali, al variare dei quali si ottengono tutte le possibili soluzioni.

Se vogliamo esprimere la soluzione in termini dei dati iniziali (nota: questo non era richiesto dal testo del problema), si può procedere come segue. Scriviamo $A = PDP^{-1}$, dove

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Essendo $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} = PDP^{-1}\boldsymbol{x}$, allora $P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = DP^{-1}\boldsymbol{x}$. Quindi se definiamo $P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, dobbiamo risolvere

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = D\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{(1+\alpha)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{(1+\alpha)t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Per ottenere la soluzione particolare del sistema, facciamo la trasformazione inversa

$$\boldsymbol{x}(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{(1+\alpha)t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \tag{12}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{\alpha(1+\alpha)}[(\alpha^2 + \alpha e^{(1+\alpha)t})x_1(0) + \alpha^3(e^{(1+\alpha)t} - 1)x_2(0)], \\ x_2(t) = \frac{1}{\alpha(1+\alpha)}[(-1 + e^{(1+\alpha)t})x_1(0) + (\alpha + \alpha^2 e^{(1+\alpha)t})x_2(0)]. \end{cases} \tag{13}$$

Scegliendo ad esempio $\alpha = 1$ e $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$, troviamo

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}, \\ x_2(t) = e^{2t}. \end{cases} \tag{14}$$

Nota: quest'ultima soluzione si poteva ricavare direttamente studiando il sistema per $\alpha = 1$ senza bisogno di applicare la procedura generale descritta sopra. Infatti il sistema per $\alpha = 1$ si riduce a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{15}$$

che è equivalente a (sommando o sottraendo le due equazioni): $\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ e $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$, che implica $x_1(t) + x_2(t) = (x_1(0) + x_2(0))e^{2t}$ e $x_1(t) - x_2(t) = x_1(0) - x_2(0)$ o, equivalentemente, $x_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0))e^{2t} + (x_1(0) - x_2(0))$ e $x_2(t) = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0))e^{2t} - (x_1(0) - x_2(0))$.

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

1) L'equazione $det(A - \lambda\mathbb{I}) = (1-\lambda)^2 - \alpha = 0$ è verificata per $\lambda = \lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{\alpha}$. Quindi:

- se $\alpha = 0$, $\lambda_+ = \lambda_- = 1$. La matrice A ammette un unico autovettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la matrice non è diagonalizzabile.

- Se $\alpha \neq 0$ la matrice è diagonalizzabile: se $\alpha < 0$, gli autovalori sono complessi coniugati, $\lambda_\pm = 1 \pm i\sqrt{|\alpha|}$; se $\alpha > 0$ sono reali e distinti. Per trovare i suoi autovettori $\eta_\pm$ risolviamo l'equazione secolare $A\boldsymbol{x} = \lambda_\pm \boldsymbol{x}$ con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} u + \alpha v = \lambda_\pm u \\ u + v = \lambda_\pm v \end{cases} \tag{17}$$

la cui soluzione fornisce (a meno di costante moltiplicativa) $\eta_\pm = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) La soluzione generale del problema per $\alpha \neq 0$ è

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(1+\sqrt{\alpha})t} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 e^{(1-\sqrt{\alpha})t} \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ per $\alpha > 0$, e $a_1 = a_2^* \in \mathbb{C}$ per $\alpha < 0$. In quest'ultimo caso, la soluzione generale può essere riespressa in forma reale come (ponendo $a_1 = Ae^{i\phi}$ con $A, \phi \in \mathbb{R}$):

$$\mathbf{x}(t) = 2Ae^t \begin{pmatrix} -\sqrt{|\alpha|}\sin(\sqrt{|\alpha|}t + \phi) \\ \cos(\sqrt{|\alpha|}t + \phi) \end{pmatrix}$$

Per determinare la soluzione particolare richiesta, scegliamo ad esempio $\alpha = 1$, nel qual caso il problema assegnato si riduce a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

con $x_1(0) = x_2(0) = 1$ che, come nel problema 1, è risolta da $x_1(t) = x_2(t) = e^{2t}$.

Se per esercizio si desidera calcolare anche la soluzione generale in termini dei dati iniziali, per ogni $\alpha \neq 0$, procediamo come segue. Scriviamo $A = PDP^{-1}$, dove

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & -\sqrt{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\alpha} \\ -1 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Essendo $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} = PDP^{-1}\boldsymbol{x}$, allora $P^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} = DP^{-1}\boldsymbol{x}$. Quindi se definiamo $P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, dobbiamo risolvere

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = D\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} e^{(1+\sqrt{\alpha})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\sqrt{\alpha})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{(1+\sqrt{\alpha})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\sqrt{\alpha})t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Per ottenere la soluzione particolare del sistema, facciamo la trasformazione inversa

$$\boldsymbol{x}(t) = P \begin{pmatrix} e^{(1+\sqrt{\alpha})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-\sqrt{\alpha})t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \tag{21}$$

ovvero

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sinh(\sqrt{\alpha}t)x_1(0) - \sqrt{\alpha}e^t \cosh(\alpha t)x_2(0) \\ y(t) = \frac{e^t}{\sqrt{\alpha}} \cosh(\sqrt{\alpha}t)x_1(0) + e^t \sinh(\sqrt{\alpha}t)x_2(0) \end{cases} \tag{22}$$

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

SOLUZIONE, I METODO

Risolvendo l'equazione $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (2-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) + 3(2-\lambda)$ troviamo gli autovalori:

$$\lambda_0 = 2, \qquad \lambda_\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \tag{24}$$

i cui corrispondenti autovettori possono essere scelti come

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5+\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3}-15 \end{pmatrix}, \quad \eta_\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

La soluzione generale si può quindi scrivere nella forma

$$\mathbf{x}(t) = ae^{2t} \begin{pmatrix} 7 \\ 5+\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3}-15 \end{pmatrix} + be^{-\frac{1}{2}t} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + b^* e^{-\frac{1}{2}t} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C}$. Ponendo $b = Be^{i\phi}$, tale soluzione si può scrivere in forma reale come

$$\mathbf{x}(t) = ae^{2t} \begin{pmatrix} 7 \\ 5+\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3}-15 \end{pmatrix} + Be^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi) \\ 3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi) - \sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi) \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE, II METODO

Notiamo che la prima riga è del sistema è

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t), \tag{26}$$

da cui troviamo la soluzione

$$x_1(t) = x_1(0)e^{2t}. \tag{27}$$

Sostituendola nelle righe 2 e 3 del sistema otteniamo

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3(t) + 5e^{2t}x_1(0) \\ \dot{x}_3(t) = -3x_2(t) + x_3(t) + \sqrt{3}e^{2t}x_1(0) \end{cases} \tag{28}$$

Quindi per trovare la soluzione del sistema di 3 equazioni lineari omogenee, avendo già trovato la soluzione della prima equazione (scritta in forma diagonale) (27), non ci resta che risolvere il *sistema di 2 equazioni differenziali lineari* **non omogenee** costituito dalla riga 2 e 3.
Infatti, se definisco

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} x_1(0)e^{2t} \qquad \boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \tag{29}$$

il sistema (28) diventa

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = B\boldsymbol{v}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{30}$$

Il polinomio caratteristico di B è $\det(B - \lambda \mathbb{I}) = (-2-\lambda)(1-\lambda) + 3 = 0$, dunque gli autovalori (complessi coniugati) sono

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \tag{31}$$

Dato che sono distinti, B è diagonalizzabile, e i rispettivi autovettori possono essere scelti come

$$\boldsymbol{\eta}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Cerco quindi la soluzione generale della (28) nella base degli autovettori:

$$\mathbf{v}(t) = a_+(t)\boldsymbol{\eta}_+ + a_-(t)\boldsymbol{\eta}_- \tag{33}$$

dove $a_-(t) = [a_+(t)]^*$. Per risolvere l'equazione in questa base, scrivo il termine non omogeneo $\mathbf{b}(t)$ nella base degli autovettori:

$$\mathbf{b}(t) = x_1(0)e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = c(t)\boldsymbol{\eta}_+ + c^*(t)\boldsymbol{\eta}_- \tag{34}$$

che come si vede facilmente è risolta da $c(t) = x_1(0)e^{2t}\big(\frac{5}{2} + i(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 1)\big)$. Sostituendo le (33)-(34) nella (30) troviamo l'equazione per il coefficiente $a_+(t)$ (a_- poi è il suo complesso coniugato):

$$\dot{a}_+(t) = \lambda_+ a_+(t) + c(t)$$

con $\lambda_+ = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Per risolvere questa equazione usiamo la (1), che ci fornisce:

$$a_+(t) = e^{\lambda_+ t}\Big(a_+(0) + \int_0^t e^{-\lambda_+ \tau}c(\tau)d\tau\Big).$$

È facile verificare (calcolando esplicitamente l'integrale $\int_0^t e^{-\lambda_+\tau}c(\tau)d\tau$) che tale soluzione è equivalente a quella trovata con il primo metodo (i dettagli della verifica sono lasciati al lettore interessato).

Esercizio 4 1) Per stabilire se ammette punto fisso, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = -4x_1 - x_2 \\ 0 = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 \\ 0 = -x_2 - x_3 + 1 \end{cases} \tag{35}$$

Sommando le tre equazioni si trova $0 = -1$ che non ha mai soluzione, quindi il sistema non ammette punto fisso: non esiste alcun dato iniziale tale che il moto corrispondente sia costante.

2) Se definiamo

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

possiamo scrivere il sistema nella forma $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \mathbf{b}$.

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = (-4-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 4(-1-\lambda) + (-4-\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda = 0 \tag{37}$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_0 = 0 \qquad \lambda_\pm = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \tag{38}$$

e gli autovettori

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta}_+ = \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta}_- = \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Quindi la matrice del cambiamento di basee la sua inversa possono essere scritte come

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3+\sqrt{13}}{2} & \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \\ -4 & \frac{1-\sqrt{13}}{2} & \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 26 & 26 & 26 \\ -4(13+3\sqrt{13}) & -2(26+7\sqrt{13}) & -39-11\sqrt{13} \\ -4(13-3\sqrt{13}) & -2(26-7\sqrt{13}) & -39+11\sqrt{13} \end{pmatrix} \tag{40}$$

grazie alla quale possiamo scrivere

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_+ & \\ 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \qquad P^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{17+5\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} \\ \frac{5\sqrt{13}-17}{2\sqrt{13}} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix} \tag{41}$$

Come nei precedenti esercizi, se definiamo $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, ci resta da risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \lambda_0 y_1 + b_1' \\ \dot{y_2} = \lambda_+ y_2 + b_2' \\ \dot{y_3} = \lambda_- y_3 + b_3', \end{cases} \tag{42}$$

la cui soluzione si ottiene usando nuovamente la (1).

Esercizio 5 Vediamo che possiamo direttamente integrare

$$x_1(t) = x_1(0)e^t \tag{43}$$

Sostituendo questo risultato nella seconda e nella terza equazione del sistema, otteniamo

$$\begin{cases} \dot{x_2}(t) = -3x_2(t) + x_1(0)e^t \\ \dot{x_3}(t) = 5x_3(t) + x_1(0)e^t. \end{cases} \tag{44}$$

Le equazioni 2 e 3 in questa forma sono *equazioni differenziali lineari non omogenee*, che possono essere risolte usando le (1). In questo modo otteniamo

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t x_1(0) \\ x_2(t) = e^{-3t}\left(x_2(0) + x_1(0)\int_0^t e^{3s}e^s ds\right) = e^{-3t}\left(x_2(0) + x_1(0)\left(\frac{e^{4t}}{4} - \frac{1}{4}\right)\right) \\ x_3(t) = e^{5t}\left(x_3(0) + x_1(0)\int_0^t e^{-4s} ds\right) = e^{5t}\left(x_3(0) + x_1(0)\left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-4t}}{4}\right)\right) \end{cases} \tag{45}$$

Esercizio 6 $V'(x) = -x^3 + \alpha x$, quindi il sistema meccanico da studiare è $\ddot{x} = x^3 - \alpha x$. Definendo $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, riduciamo l'equazione differenziale di secondo grado a un sistema di due equazioni differenziali di primo grado

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - \alpha x_1 \end{cases} \tag{46}$$

Prima di tutto cerchiamo i punti di equilibrio risolvendo

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = x_1^3 - \alpha x_1 \end{cases} \tag{47}$$

- CASO $\alpha < 0$. l'unico punto di equilibrio è $(x_{1_0}, x_{2_0}) = (0, 0)$;
- CASO $\alpha > 0$. ci sono tre punti di equilibrio: $(x_{1_0}, x_{2_0}) = (0, 0)$, $(x_{1_\pm}, x_{2_0}) = (\pm\sqrt{\alpha}, 0)$

Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio usando il criterio del linearizzato, calcoliamo la matrice

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 - \alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

STUDIO DEI PUNTI DI EQUILIBRIO

- $(0, 0)$

  $$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

  $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + \alpha$, ovvero $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-\alpha}$

  - CASO $\alpha > 0$: i due autovalori sono complessi coniugati e $\Re(\lambda_\pm) = 0$, dunque il criterio del linearizzato non ci permette di concludere nulla.
  - CASO $\alpha < 0$: i due autovalori sono reali e distinti, ed essendo $\Re(\lambda_+) > 0$, grazie al criterio del linearizzato concludiamo che $(0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.

- $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ *OSSERVAZIONE: QUESTI PUNTI DI EQUILIBRIO ESISTONO SOLO SE* $\alpha > 0$.

  $$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

  $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 2\alpha$, ovvero $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2\alpha}$. I due autovalori sono reali e distinti, $\lambda_+ > 0$, quindi sono punti di equilibrio instabile.

Esercizio 7 $V(x) = \frac{x^3}{3} - x$, quindi $V'(x) = x^2 - 1$ e $\ddot{x} = -x^2 + 1$. Definendo $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, riduciamo l'equazione differenziale di secondo grado in un sistema di due equazioni differenziali di primo grado

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2) = -x_1^2 + 1 \end{cases} \tag{51}$$

Prima di tutto cerchiamo i punti di equilibrio risolvendo

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -x_1^2 + 1 \end{cases} \tag{52}$$

che ha soluzioni $(x_{1_\pm}, x_{2_0}) = (\pm 1, 0)$. Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio usando il criterio del linearizzato, calcoliamo la matrice

$$A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

quindi

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

STUDIO DELLA STABILITÁ

- $(1, 0)$: $det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 + 2$, quindi $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{2}$. Essendo $\Re(\lambda_\pm) = 0$, il criterio del linearizzato non ci permette di concludere nulla riguardo la stabilità di questo punto di equilibrio.

- $(-1, 0)$: $det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - 2$, quindi $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$. I due autovalori sono reali e distinti, $\lambda_+ > 0$, quindi il criterio del linearizzato ci permette di concludere che il punto $(-1, 0)$ è un punto di instabilità del sistema.