Esercizio 1 SOLUZIONE

1. Scegliendo le coordinate di V e P come in figura troviamo:

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{VP} = \begin{pmatrix} x \\ -d \end{pmatrix} \tag{1}$$

e quindi $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + d^2}$, cosicché

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}k(|\boldsymbol{r}| - \ell)^2 = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)^2 \tag{2}$$

La massa è vincolata a muoversi lungo l'asse x, dunque la sua velocità è semplicemente $\dot{x}$.
La Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)^2. \tag{3}$$

2. Per ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange, calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -\frac{k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)x}{\sqrt{x^2 + d^2}}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}. \end{aligned} \tag{4}$$

L'equazione di Eulero- Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$ è esplicitamente

$$m\ddot{x} = -\frac{k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)x}{\sqrt{x^2 + d^2}}. \tag{5}$$

3. Grazie all'equazione di Eulero- Lagrange, la quantità

$$E = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)^2 \tag{6}$$

è una quantità conservata, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \ddot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0.$$

4. L'equazione della curva di livello a energia E è:

$$\dot{x} = \frac{2}{m}\Big(E - U(x)\Big) = \frac{2}{m}\Big(E - \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)^2\Big)$$

Per disegnarne il grafico, iniziamo a studiare il grafico di $U(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)^2$. Osserviamo innanzitutto che $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \infty$. Inoltre

$$U'(x) = \frac{kx(\sqrt{x^2 + d^2} - \ell)}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

Dato che il denominatore è sempre diverso da zero e dato che $d < \ell$, $U'(x)$ si annulla solo se $x = x_0 = 0$ o $x = x_\pm = \pm\sqrt{\ell^2 - d^2}$, ed è positiva solo se $x_- < x < x_0$ o $x > x_+$. Il grafico dell'energia potenziale è in figura 1, mentre il grafico delle curve di livello corrispondenti è in figura 2. Quindi

- per $E < U(x_\pm)$ non sono permessi moti,
- se il sistema parte in uno dei tre punti di equilibrio con velocità nulla, il moto è costante,

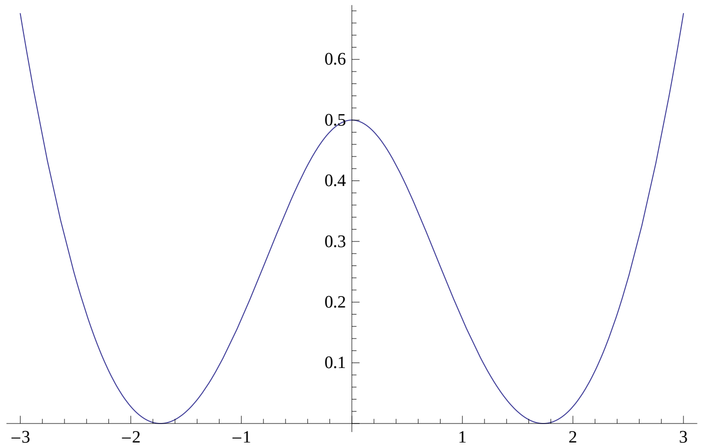

Figure 1: Grafico del potenziale per valori $m = 1kg$, $\ell = 2m$, $d = 1m$, $g = 9.8m/s^2$, $k = 1kg/s^2$.

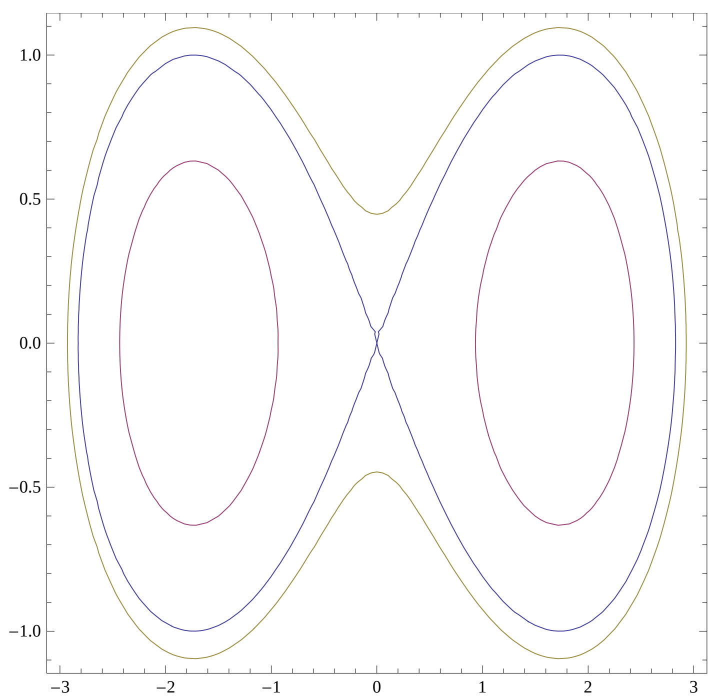

Figure 2: Grafico delle curve di livello per valori $m = 1kg$, $\ell = 2m$, $d = 1m$, $g = 9.8m/s^2$, $k = kg/s^2$.

- se $U(x_\pm) < E < U(x_0)$, il moto è periodico intorno a uno dei due minimi locali, in base alla scelta del dato iniziale (intorno a x_-, se il dato iniziale è scelto a sinistra di x_0, o intorno a x_+ se è scelto a destra di x_0).
- se $E = U(x_0)$ e $x(0) \neq 0$, allora il moto si svolge su una delle porzioni non banali della separatrice (i.e., o sull'occhiello destro o sull'occhiello sinistro, vedi figura), ed e asintotico sia nel passato che nel futuro al punto di equilibrio instabile $x_0 = 0$.
- per $E > U(x_0)$ il moto è periodico attorno ad entrambi i minimi.

Esercizio 2 SOLUZIONE

1. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che $\boldsymbol{L}$ è rivolto lungo l'asse $\hat{z}$. Quindi,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta m\rho^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Se $|\boldsymbol{L}| = L$, osserviamo che $\dot\theta = \frac{L}{m\rho^2}$, quindi l'energia meccanica è

$$E = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot\theta^2 + V(\rho) = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}. \tag{8}$$

Definendo $V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = A_0\frac{\rho^2}{\rho^2+r_0^2} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$, ci riduciamo a studiare un problema unidimensionale in ρ.

2. Studiamo il grafico di $V_{eff}(\rho)$. Osserviamo innanzitutto che $\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = \infty$, $\lim_{\rho\to\infty} V_{eff} = A_0$. Studiamo poi il segno della derivata di V_{eff}:

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{2mr_0^2A_0\rho^4 - L^2(\rho^2+r_0^2)^2}{m\rho^3(\rho^2+r_0^2)^2}. \tag{9}$$

Tale espressione si annulla se e solo se

$$2mr_0^2A_0\rho^4 - L^2(\rho^2+r_0^2)^2 = 0 \tag{10}$$

o, equivalentemente,

$$(2mr_0^2A_0 - L^2)\rho^4 - 2L^2r_0^2\rho^2 - L^2r_0^4 = 0, \tag{11}$$

che ha soluzioni

$$\rho_\pm^2 = \frac{L^2r_0^2 \pm \sqrt{L^4r_0^4 + L^2r_0^4(2mr_0^2A_0 - L^2)}}{2mr_0^2A_0 - L^2} = r_0^2\frac{1 \pm \sqrt{2mr_0^2A_0/L^2}}{2mr_0^2A_0/L^2 - 1}. \tag{12}$$

Tali soluzioni sono accettabili solo se positive. Per $0 < L < \sqrt{2A_0mr_0^2}$, ρ_+^2 è positiva (e quindi è accettabile), mentre ρ_-^2 è negativa (e quindi non è accettabile). In conclusione, $V'_{eff}(\rho)$ si annulla solo se $\rho = \rho_+$, con

$$\rho_+ = r_0\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{2mr_0^2A_0/L^2}}{2mr_0^2A_0/L^2 - 1}},$$

è negativa per $\rho < \rho_+$ e positiva per $\rho > \rho_+$. Il grafico di V_{eff} è in figura 3.

3. I grafici delle curve di livello sono in figura 4.

4. Al variare di E i moti possibili della variabile radiale sono i seguenti:

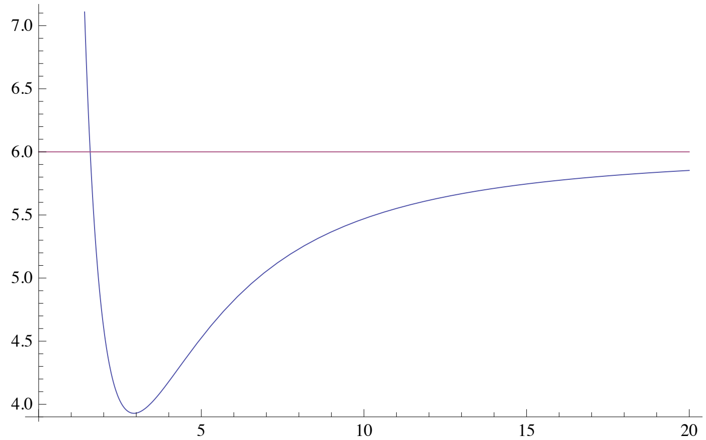

Figure 3: Grafico del potenziale efficace per $0 < L < \sqrt{2A_0 m r_0^2}$ (blu), e del valore costante A_0 (viola).

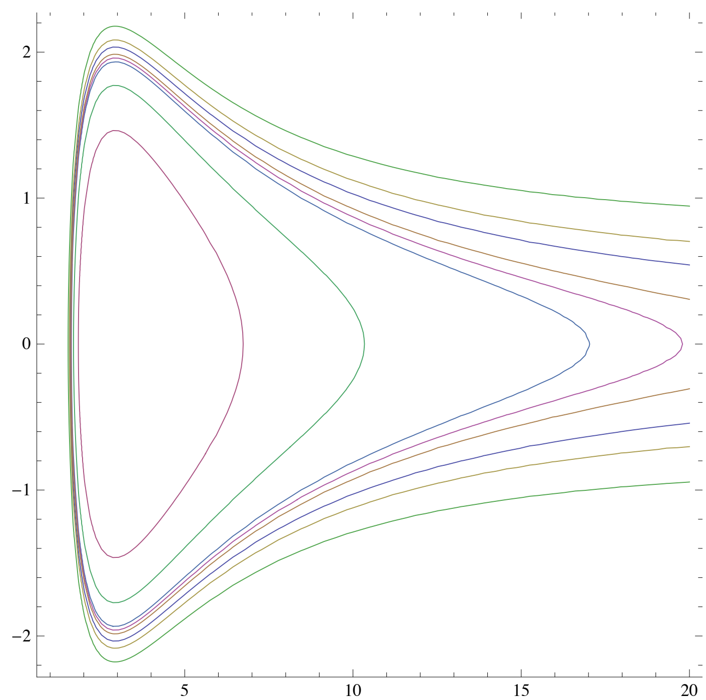

Figure 4: Grafico delle curve di livello per $0 < L < \sqrt{2A_0 m r_0^2}$.

- Per $E < V(\rho_+)$ non sono ammessi moti.
- Per $E = V(\rho_+)$ l'unico moto possibile è quello costante sul punto di equilibrio stabile $\rho(t) \equiv \rho_+$.
- Per $V(\rho_+) < E < A_0$ i moti di ρ sono periodici intorno a ρ_+.
- Per $E \geq A_0$ i moti sono aperti e tendono asintoticamente all'infinito, sia nel passato che nel futuro. In particolare, per $E = A_0$ i moti tendono asintoticamente all'infinito, che viene raggiunto con velocità radiale nulla.

Se fissiamo un valore di E per cui il moto radiale è periodico e non banale (i.e., $V(\rho_- < E < A_0)$ il periodo del moto radiale è

$$T_1 = 2 \int_{\rho_1^{(E)}}^{\rho_2^{(E)}} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} \tag{13}$$

dove $\rho_1^{(E)}$ e $\rho_2^{(E)}$ sono le due soluzioni di $E = V_{eff}(\rho)$. Se $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature corrispondente, la soluzione del moto angolare è

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t ds \frac{L}{m\rho^2(s)}, \tag{14}$$

che può scriversi come somma di un moto circolare uniforme $\theta_0 + \omega_2 t$ di periodo $T_2 = 2\pi/\omega_2$, con

$$\omega_2 = 2\frac{L}{m} \int_{\rho_1^{(E)}}^{\rho_2^{(E)}} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}$$

e di un moto periodico di periodo T_1. Il moto complessivo è periodico se e solo se $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$, ed è quasi-periodico altrimenti.

5. Un caso in cui il moto complessivo è periodico è quello in cui il moto radiale è banale, $\rho(t) \equiv \rho_+$. In tal caso il moto complessivo è circolare uniforme, di periodo $T = 2\pi/\omega$, con

$$\omega = \frac{L}{m\rho_+^2}$$