MA - Soluzione del primo scritto (12-6-2015)

1. Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi senza attrito su una guida uni-dimensionale di equazione $z' = (x')^3/\ell^2$ appartenente al piano verticale x'-z' di un sistema di riferimento (mobile) $x'y'z'$, il cui asse z' è verticale rivolto verso l'alto. Il sistema di riferimento $x'y'z'$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale rispetto al sistema di riferimento (fisso) del laboratorio xyz, in modo tale che: (i) le origini dei due sistemi di riferimento coincidano ad ogni istante, (ii) l'asse z' coincida con l'asse z ad ogni istante, (iii) i due sistemi di riferimento coincidano all'istante iniziale $t = 0$.

   (a) Si scriva la legge di trasformazione delle coordinate dal sistema di riferimento mobile a quello fisso, esprimendo le coordinate (x, y, z) in funzione di (x', y', z') e del tempo.

   (b) Si scriva l'equazione parametrica della guida uni-dimensionale nel sistema di riferimento fisso.

   (c) Si scriva la Lagrangiana per la massa puntiforme m, assumendo che la stessa sia soggetta (oltre che alle forze di reazione vincolare che la mantengono sulla guida) alla forza peso.

   (d) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente.

   (e) Si identifichi una grandezza conservata del moto, e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

   (f) Si scriva l'equazione delle curve di livello associate alla grandezza conservata trovata al punto precedente, se ne disegni il grafico, e si discuta la natura qualitativa del moto risultante.

   (g) Si identifichino i dati iniziali per cui il moto (visto nel sistema di riferimento mobile) è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Soluzione

(a) Il sistema mobile è in rotazione attorno all'asse z rispetto a quello fisso: quindi la legge di trasformazione delle coordinate agisce in modo non banale solo sulle coordinate $x'y'$, che sono legate alle coordinate xy attraverso una rotazione di angolo ωt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\ z' \end{pmatrix}$$

(b) L'equazione parametrica della guida uni-dimensionale nel sistema di riferimento mobile è

$$\boldsymbol{\gamma}'(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ \xi^3/\ell^2 \end{pmatrix}$$

con $\xi \in \mathbb{R}$. Rimpiazzando tale espressione nella legge di trasformazione delle coordinate ricavata al punto precedente troviamo l'equazione parametrica della guida nel sistema di riferimento fisso:

$$\boldsymbol{\gamma}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \cos \omega t \\ \xi \sin \omega t \\ \xi^3/\ell^2 \end{pmatrix}$$

(c) Scriviamo la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane la coordinata ξ usata per parametrizzare la guida, e la sua derivata nel tempo $\dot{\xi}$. La legge oraria $\mathbf{x}(t)$ della massa m corrispondente a una legge oraria $\xi(t)$ per la coordinata Lagrangiana ξ è

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \cos \omega t \\ \xi(t) \sin \omega t \\ \xi^3(t)/\ell^2 \end{pmatrix}$$

La velocità corrispondente, in termini di $(\xi, \dot{\xi})$, è

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\xi} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 3\xi^2/\ell^2 \end{pmatrix} + \omega \xi \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'energia cinetica della particella è quindi

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{m}{2}\Big[\dot{\xi}^2\Big(1 + 9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big) + \omega^2\xi^2\Big].$$

L'energia potenziale gravitazionale della particella in termini della coordinata Lagrangiana ξ è $V_g(\xi) = mg\xi^3/\ell^2$. In conclusione, la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2\Big(1 + 9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big) + \frac{m}{2}\omega^2\xi^2 - mg\frac{\xi^3}{\ell^2}.$$

Si noti che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, nonostante il vincolo fosse dipendente dal tempo.

(d) L'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente alla Lagrangiana $\mathcal{L}$ è

$$\frac{d}{dt}\Big[m\dot{\xi}\Big(1+9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big)\Big] = 18m\dot{\xi}^2\frac{\xi^3}{\ell^4} + m\omega^2\xi - 3mg\frac{\xi^2}{\ell^2}.$$

Sviluppando la derivata nel membro a sinistra dell'equazione troviamo:

$$m\ddot{\xi}\Big(1+9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big) = -18m\dot{\xi}^2\frac{\xi^3}{\ell^4} + m\omega^2\xi - 3mg\frac{\xi^2}{\ell^2}. \qquad (1)$$

(e) Poiché la Lagrangiana del sistema è indipendente dal tempo, l'energia generalizzata $E = \dot{\xi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} - \mathcal{L}$ è una grandezza conservata del moto. Si trova:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2\Big(1+9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big) - \frac{m}{2}\omega^2\xi^2 + mg\frac{\xi^3}{\ell^2}.$$

Verifichiamo esplicitamente che E è conservata dall'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}E = m\dot{\xi}\ddot{\xi}\Big(1+9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big) + 18m\dot{\xi}^3\frac{\xi^3}{\ell^4} - m\omega^2\dot{\xi}\xi + 3mg\dot{\xi}\frac{\xi^2}{\ell^2}$$

Mettendo in evidenza $\dot{\xi}$ e riesprimendo $m\dot{\xi}\ddot{\xi}\Big(1+9\frac{\xi^4}{\ell^4}\Big)$ in termini di $(\xi,\dot{\xi})$ attraverso la (1) troviamo:

$$\frac{d}{dt}E = \dot{\xi}\Big\{-18m\dot{\xi}^2\frac{\xi^3}{\ell^4} + m\omega^2\xi - 3mg\frac{\xi^2}{\ell^2} + 18m\dot{\xi}^2\frac{\xi^3}{\ell^4} - m\omega^2\xi + 3mg\frac{\xi^2}{\ell^2}\Big\} = 0.$$

(f) L'equazione delle curve di livello associate ad E è:

$$\dot{\xi} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\frac{E - V_{eff}(\xi)}{1+9\xi^4/\ell^4}},$$

con

$$V_{eff}(\xi) = mg\frac{\xi^3}{\ell^2} - \frac{m}{2}\omega^2\xi^2.$$

Il grafico di V_{eff} è in Fig.1

Il grafico delle curve di livello ad esso associate è in Fig.2.

Il sistema ammette due punti di equilibrio: $(0,0)$ (instabile) e $(\frac{\omega^2\ell^2}{3g},0)$ (stabile). Ovviamente, i moti con dati iniziali corrispondenti ai due punti di equilibrio sono costanti. In aggiunta a questi moti "banali, il sistema ammette:

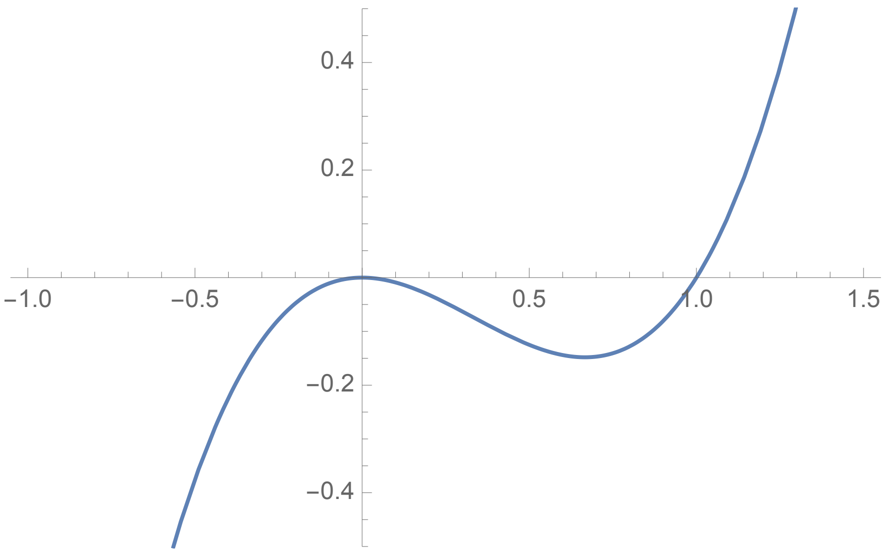

Figura 1: Grafico di $V_{eff}(\xi)$

i. moti non banali a energia nulla (moti sulla separatrice) che possono essere limitati e aperiodici, se $\xi(0) > 0$, e aperti (asintotici a $-\infty$ nel futuro o nel passato), se $\xi(0) < 0$;

ii. moti oscillatori periodici non banali attorno al punto di equilibrio stabile, se l'energia è $V_{eff}(\frac{\omega^2\ell^2}{3g}) < E < 0$ e $\xi(0) > 0$;

iii. moti aperti, asintotici a $-\infty$ sia nel futuro che nel passato, altrimenti.

(g) Come già discusso al punto precedente, il moto è periodico non banale (i.e., non costante) se e solo se $V_{eff}(\frac{\omega^2\ell^2}{3g}) < E < 0$ e $\xi(0) > 0$. In tal caso il periodo del moto è

$$T = \sqrt{2m} \int_{\xi_-}^{\xi_+} \sqrt{\frac{1 + 9\xi^4/\ell^4}{E - V_{eff}(\xi)}}\, d\xi$$

dove $\xi_\pm = \xi_\pm(E)$ sono le due radici *positive* dell'equazione $V_{eff}(\xi) = E$.

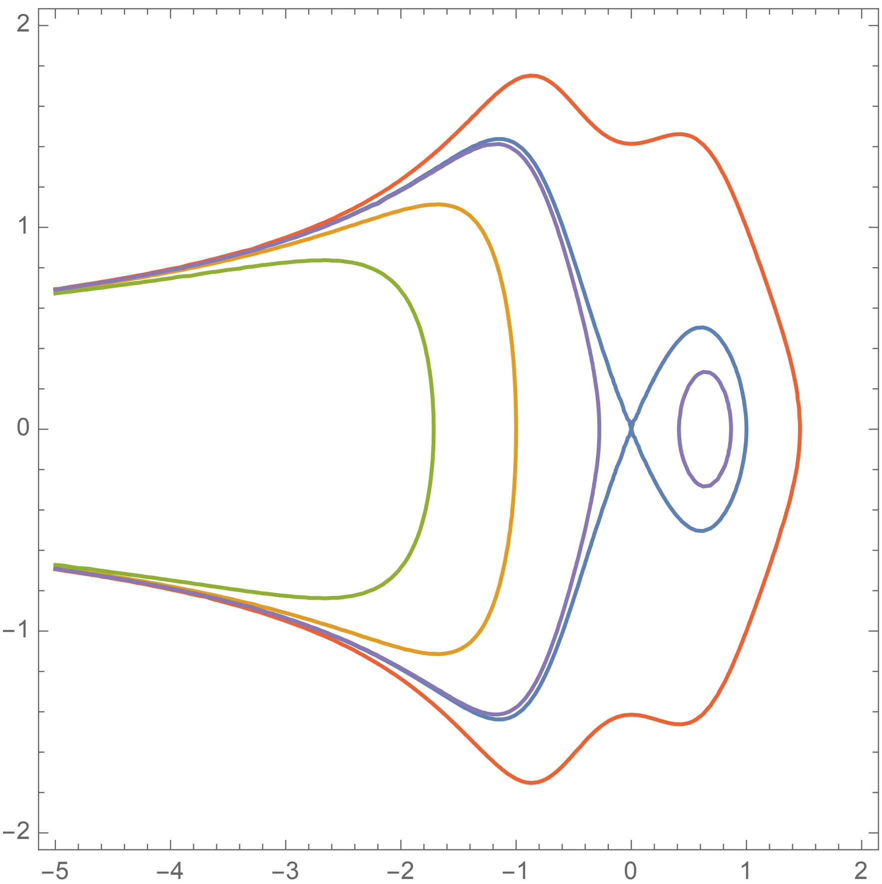

Figura 2: Curve di livello a energia fissata, al variare dell'energia E.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q} \sin q)^2 - \cos^2 q$$

per $q \in (0, \pi)$.

   (a) Si determini l'Hamiltoniana e si scrivano le equazioni di Hamilton corrispondenti.

   (b) Si scriva la trasformazione canonica $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$ associata alla funzione generatrice (di seconda specie) $F(q, P) = P \cos q$, specificandone il dominio di invertibilità. Su tale dominio, si scriva esplicitamente la trasformazione inversa.

   (c) Usando la trasformazione canonica trovata al punto precedente, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle nuove coordinate.

(d) Si risolvano le equazioni di Hamilton associate ad $\tilde{H}(Q, P)$, per un dato iniziale generico (Q_0, P_0).

(e) Nel contesto del punto precedente, si consideri il dato iniziale speciale corrispondente (nelle variabili originali) a $q(0) = \pi/4$, $\dot{q}(0) = \sqrt{2}$. Si esprima la soluzione in termini della variabile q, i.e., si determini esplicitamente la soluzione $q = q(t)$ corrispondente a tale dato iniziale.

(f) Si verifichi che la soluzione $q(t)$ trovata al punto precedente risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per $\mathcal{L}(q, \dot{q})$.

Soluzione

(a) Il momento coniugato a q è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \sin^2 q \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{\sin^2 q} \tag{2}$$

che è ben definita se $\sin q \neq 0$ e quindi in particolare sull'intervallo assegnato $q \in (0, \pi)$. L'Hamiltoniana corrispondente è

$$H(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})\Big|_{\dot{q}=p/\sin^2 q} = \frac{p^2}{2\sin^2 q} + \cos^2 q.$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sin^2 q} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{\sin^3 q} \cos q + 2 \sin q \cos q \end{cases}$$

(b) La trasformazione canonica associata ad $F(q, P) = P \cos q$ è

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = -P \sin q \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \cos q \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Q = \cos q \\ P = -\frac{p}{\sin q} \end{cases} \tag{3}$$

che è invertibile per $(q, p) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$. La trasformazione $Q = Q(q), P = P(q, p)$ mappa in modo invertibile l'insieme $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ in $(-1, 1) \times \mathbb{R}$ e la trasformazione inversa è

$$\begin{cases} q = \arccos Q \\ p = -P \sin(\arccos Q) = -P\sqrt{1 - Q^2} \end{cases} \tag{4}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che, sul dominio di definizione considerato, $\sin(\arccos Q) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos Q)} = \sqrt{1 - Q^2}$.

(c) Resprimendo l'Hamiltoniana $H(q,p)$ nelle nuove coordinate troviamo:

$$\tilde{H}(Q,P) = \frac{P^2}{2} + Q^2$$

(d) Le equazioni di Hamilton associate ad $\tilde{H}(Q,P)$ sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = -2Q \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{Q} + 2Q = 0$$

la cui soluzione generale è

$$Q(t) = a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t), \qquad P = \dot{Q} = -a\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}b\cos(\sqrt{2}t)$$

Imponendo il dato iniziale $(Q(0), P(0)) = (Q_0, P_0)$ troviamo:

$$Q(t) = Q_0\cos(\sqrt{2}t) + \frac{P_0}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t), \qquad P = -Q_0\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + P_0\cos(\sqrt{2}t) \tag{5}$$

(e) Usando la (2) troviamo che il dato iniziale per p corrispondente a $(q(0), \dot{q}(0)) = (\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ è

$$p_0 = \dot{q}(0)\sin^2 q(0) = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$$

Usando la (3) troviamo che il dato iniziale per (Q,P) corrispondente a $(q(0), \dot{q}(0)) = (\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ è

$$Q_0 = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad P_0 = -\frac{(1/\sqrt{2})}{\sin(\pi/4)} = -1.$$

Sostituendo nella (5) troviamo

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) = \cos\left(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Usando la (4) troviamo infine

$$q(t) = \arccos\left[\cos\left(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}t + \frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

(f) Verifichiamo che la soluzione trovata al punto precedente risolve l'equazione di Eulero-Lagrange per $\mathcal{L}(q,\dot{q})$, la cui forma esplicita è

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}\sin^2 q) = \dot{q}^2 \sin q\cos q + 2\sin q\cos q.$$

Sostituendo in tale equazione la (6) troviamo:

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\sin^2(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{4})) = 4\sin(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{4})\cos(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{4})$$

che è verificata identicamente.