11^o tutorato - MA - 15/5/2015

Esercizio 1 Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione $F(q, P) = P \log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$.

SOLUZIONI Si veda la soluzione del secondo esercizio dello Scritto di Meccanica Analitica del 25-1-2011 del corso della Prof. E. Scoppola (testo e soluzione sono disponibili al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/mas/esercizi_09_10/esercizi.html`)

Esercizio 2 Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.
3. Determinare la trasformazione canonica generata da $F(q, Q) = Q^2 e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$.

SOLUZIONI Si veda la soluzione del secondo esercizio dello Scritto di Meccanica Analitica del 7-9-2010 del corso della Prof. E. Scoppola (testo e soluzione sono disponibili allo stesso link indicato sopra.

Esercizio 3 Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q\dot{q}^2$

1. Per quali valori di q la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è regolare?
2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate
$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$
è canonica (su quale dominio è definita?). Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 2/3$.

SOLUZIONI

1. $p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 2q\dot{q}$, quindi, se $q \neq 0$, $\dot{q} = \frac{p}{2q}$. La Lagrangiana è regolare su ogni intervallo *non* contenente $q = 0$.

2. L'Hamiltoniana è
$$H(q,p) = [p\dot q - \mathcal{L}(q,\dot q)]\Big|_{\dot q = \frac{p}{2q}} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{q}.$$
Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono
$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{2}\frac{p}{q}, \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{q^2}. \end{cases} \tag{1}$$

3. La trasformazione assegnata è definita per $q \neq 0$ e $p \neq 0$, e mappa in modo invertibile $\{q>0, p>0\}$ in $\{Q>0, P<0\}$, $\{q>0, p<0\}$ in $\{Q>0, P>0\}$, $\{q<0, p>0\}$ in $\{Q<0, P<0\}$, e $\{q<0, p<0\}$ in $\{Q<0, P>0\}$. Consideriamo il caso $\{q>0, p>0\} \leftrightarrow \{Q>0, P<0\}$ (gli altri casi si trattano analogamente). Su tale dominio, la trasformazione inversa di quella assegnata è
$$\begin{cases} q = \left(\frac{9}{4}QP^2\right)^{1/3}, \\ p = (-12Q^2P)^{1/3}. \end{cases} \tag{2}$$
Per dimostrare che è canonica, cerco una funzione generatrice di seconda specie $G(q,P)$ tale che
$$\begin{cases} p = \frac{\partial G}{\partial q}(q,P) = -\frac{4}{3}\frac{q^2}{P} \\ Q = \frac{\partial G}{\partial P}(q,P) = \frac{1}{4q}\Big(-\frac{4}{3}\frac{q^2}{P}\Big)^2 = \frac{4}{9}\frac{q^3}{P^2}, \end{cases} \tag{3}$$
che è risolta da $G(q,P) = -\frac{4}{9}\frac{q^3}{P}$, e dimostra che la trasformazione è canonica.

Nelle nuove coordinate, l'Hamiltoniana è
$$H(Q,P) = Q,$$
le cui equazioni di Hamilton sono
$$\begin{cases} \dot Q = 0, \\ \dot P = -1 \end{cases} \tag{4}$$

4. Integrando le equazioni precedenti, otteniamo
$$\begin{cases} Q(t) = Q_0, \\ P(t) = P_0 - t \end{cases} \tag{5}$$
ovvero, imponendo le condizioni iniziali,
$$\begin{cases} Q(t) = 4/9, \\ P(t) = -(1+t). \end{cases} \tag{6}$$
Nelle coordinate (q,p) la soluzione è
$$\begin{cases} q(t) = (1+t)^{2/3}, \\ p(t) = \frac{4}{3}(1+t)^{1/3}, \end{cases} \tag{7}$$
che è valida per $t > -1$.

Esercizio 4

1. Data l'Hamiltoniana
$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{q})$$
con $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$, si verifichi che, se $U(\mathbf{q})$ è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse $\hat{e}_3$ (i.e., $U(\mathbf{q}) = V(\sqrt{q_1^2 + q_2^2}, q_3)$, per un'opportuna funzione V), allora la parentesi di Poisson di H con la terza componente del momento angolare $l_3 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ è uguale a zero.

2. Si verifichi che $\{l_1, l_2\} = l_3$, $\{l_2, l_3\} = l_1$, $\{l_3, l_1\} = l_2$. Si dimostri quindi che se il potenziale U dell'Hamiltoniana al punto precedente è invariate per rotazioni sia attorno all'asse $\hat{e}_3$, che attorno all'asse $\hat{e}_1$, allora tutte e tre le componenti di $\mathbf{l} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ sono integrali primi del moto.

SOLUZIONE

1. Definiamo $\rho(q_1, q_2) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, e ricordiamo che $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 \\ q_1 p_2 - q_2 p_1 \end{pmatrix}$. Gli ingredienti necessari per il calcolo di $\{H, l_3\}$ sono:
$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \\ \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \\ \frac{\partial V}{\partial q_3} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} p_1/m \\ p_2/m \\ p_3/m \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \ell_3}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \ell_3}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$
Quindi
$$\{H, \ell_3\} = \frac{\partial V}{\partial \rho} \left[-\frac{q_1 q_2}{\rho} + \frac{q_2 q_1}{\rho} \right] - \left[\frac{p_1 p_2}{m} - \frac{p_2 p_1}{m} \right] = 0 \tag{9}$$

2. Osserviamo che
$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \ell_1}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_3 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \ell_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \ell_2}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ -q_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$
(le derivate della terza componente sono già state calcolate al punto 1). Quindi
$$\begin{aligned} \{\ell_1, \ell_2\} &= q_1 p_2 - q_2 p_1 = \ell_3 \\ \{\ell_2, \ell_3\} &= q_2 p_3 - q_3 p_2 = \ell_1 \\ \{\ell_3, \ell_1\} &= q_3 p_1 - q_1 p_3 = \ell_2 \end{aligned} \tag{11}$$
Come visto al punto 1, se il potenziale è invariante per rotazioni attorno all'asse $\hat{e}_3$, $\{H, \ell_3\} = 0$. Quindi, con un ragionamento analogo concludiamo che se il potenziale è invariante anche per rotazioni attorno all'asse $\hat{e}_1$, $\{H, \ell_1\} = 0$. Ma, come visto a lezione, $\{H, \ell_3\} = 0$ & $\{H, \ell_1\} = 0 \Rightarrow \{H, \{\ell_3, \ell_1\}\} = 0$ *i.e.* $\{H, \ell_2\} = 0$, come volevasi dimostrare.