12^o tutorato - MA - 20/5/2015

Esercizio 1 Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2q^2}\left[1 + \left(\frac{\dot{q}}{q^2}\right)^2\right]$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Si determini la trasformazione canonica puntuale tale che $Q = Q(q) = \frac{1}{2q^2}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.
4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.
5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

SOLUZIONE

1. $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2}\frac{\dot{q}^2}{q^6}$ e $p := \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^6}$. Quindi

$$H(q, p) = [p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})]\Big|_{\dot{q}=pq^6} = \frac{p^2 q^6}{2} - \frac{1}{2q^2}. \tag{1}$$

2. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^6, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -3p^2q^5 - \frac{1}{q^3}. \end{cases} \tag{2}$$

3. Cerchiamo una funzione generatrice $F(q, P)$ tale che

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}, \\ p = \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}. \end{cases} \tag{3}$$

Usando la prima, $Q(q) = \frac{1}{2q^2} = \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}$ quindi $F(q, P) = \frac{P}{2q^2} + f(q)$. Usando la F appena trovata nella seconda equazione otteniamo $p = \frac{\partial F(q,P)}{\partial q} = -\frac{P}{q^3} + \frac{d}{dq}f(q)$. Scegliendo $f(q) = 0$ otteniamo la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{2q^2}, \\ P = -pq^3, \end{cases} \tag{4}$$

che è ben definita e invertibile per $q > 0$. La trasformazione inversa, definita per $Q > 0$, è

$$\begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2Q}}, \\ p = -P(2Q)^{3/2}, \end{cases} \tag{5}$$

L'Hamiltoniana nelle variabili (Q, P) è

$$H(Q, P) = \frac{P^2}{2} - Q.$$

e le corrispondenti equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = 1. \end{cases} \tag{6}$$

4. Integrando le ultime equazioni di Hamilton, otteniamo

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 + P_0 t + \frac{1}{2}t^2, \\ P(t) = P_0 + t. \end{cases} \tag{7}$$

Osservando che $q(0) = 1 \Rightarrow Q(0) = 1/2$ e $p(0) = 0 \Rightarrow P(0) = 0$, allora

$$\begin{cases} Q(t) = \frac{1}{2}(1 + t^2), \\ P(t) = t, \end{cases} \tag{8}$$

che implicano, usando la (5),

$$\begin{cases} q(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ p(t) = -t(1 + t^2)^{3/2}. \end{cases} \tag{9}$$

5. Vogliamo verificare che la soluzione $q(t)$ in (9) soddisfi l'equazione di Eulero-Lagrange del problema originale, che è

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{q}}{q^6}\Big) = -\frac{1}{q^3} - 3\frac{\dot{q}^2}{q^7} \tag{10}$$

Si noti che (9) implica, in particolare, che $\dot{q}(t) = -t(1+t^2)^{-3/2} = -tq^3(t)$. Sostituendo tale relazione nella (10) troviamo

$$\frac{d}{dt}\Big(-\frac{t}{q^3}\Big) = -\frac{1}{q^3} - 3\frac{t^2}{q}, \tag{11}$$

che è verificata, semplicemente perché il membro di sinistra è uguale, per calcolo diretto, a $-1/q^3 + 3\dot{q}/q^4$, e tale espressione è uguale al membro di destra, come si vede usando ancora una volta che $\dot{q} = -tq^3$.

Esercizio 2 Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.

2. Determinare le equazioni di Hamilton.

3. Si determini la trasformazione canonica puntuale tale che $Q = Q(q) = \frac{q^3}{3}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.

4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.

5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

SOLUZIONE

1. $p = \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \dot{q}q^4$. Quindi l'Hamiltoniana è

$$H(q, p) = \left[\frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}\right]\Bigg|_{\dot{q}=p/q^4} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{3}, \tag{12}$$

2. Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = p/q^4, \tag{13}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = 2\frac{p^2}{q^5} - q^2. \tag{14}$$

3. Cerchiamo una funzione generatrice $F(q,P)$ tale che

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}, \\ p = \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}. \end{cases} \tag{15}$$

Usando la prima, $Q(q) = q^3/3 = \frac{\partial F(q,P)}{\partial P}$ quindi $F(q,P) = \frac{q^3}{3}P + f(q)$. Usando la F appena trovata nella seconda equazione otteniamo $p = \frac{\partial F(q,P)}{\partial q} = -q^2 P + \frac{d}{dq} f(q)$. Scegliendo $f(q) = 0$ otteniamo la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \frac{q^3}{3}, \\ P = \frac{p}{q^2} \end{cases} \tag{16}$$

che è ben definita per $q \neq 0$. Consideriamo ad esempio l'intervallo $q > 0$ (considerazioni analoghe sono valide per $q < 0$). La trasformazione inversa è

$$\begin{cases} q = (3Q)^{1/3}, \\ p = P(3Q)^{2/3}. \end{cases} \tag{17}$$

L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$H(Q,P) = \frac{1}{2}P^2 + Q.$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = -1 \end{cases} \tag{18}$$

4. Integrando le equazioni di Hamilton otteniamo

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 + P_0 t - \frac{1}{2}t^2, \\ P(t) = P_0 - t. \end{cases} \tag{19}$$

Osservando che $q(0) = 1 \Rightarrow Q(0) = \frac{1}{3}$ e $p(0) = 0 \Rightarrow P(0) = 0$, allora

$$\begin{cases} Q(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2, \\ P(t) = -t. \end{cases} \tag{20}$$

Usando la (17), troviamo

$$\begin{cases} q(t) = (1 - 3t^2/2)^{1/3}, \\ p(t) = -t(1 - 3t^2/2)^{2/3}, \end{cases} \tag{21}$$

cosicché in particolare

$$\dot{q}(t) = -t(1 - \frac{3}{2}t^2)^{-2/3} = -\frac{t}{q^2(t)}. \tag{22}$$

5. Vogliamo verificare che la soluzione $q(t)$ in (21) soddisfi l'equazione di Eulero-Lagrange del problema originale, che è
$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}q^4\Big) = 2\dot{q}^2q^3 - q^2 \tag{23}$$
Sostituendo la (22) nella (23) troviamo
$$\frac{d}{dt}\Big(-tq^2\Big) = \frac{2t^2}{q} - q^2, \tag{24}$$
che è verificata, semplicemente perché il membro di sinistra è uguale, per calcolo diretto, a $-2tq\dot{q}-q^2$, e tale espressione è uguale al membro di destra, come si vede usando ancora una volta che $\dot{q} = -t/q^2$.

Esercizio 3 (Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico) Si consideri l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico (con $\omega = \sqrt{k/m}$)
$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2q^2.$$

1. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi che trasformi tale Hamiltoniana in $\tilde{H}(P) = E(P)$, con $E(P)$ un'opportuna funzione invertibile (che verrà definita nei prossimi punti).

2. Si riconosca che una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi ha la forma:
$$G(q,P) = \begin{cases} \int_{q_-}^{q} \sqrt{2m(E(P) - \frac{1}{2}m\omega^2(q')^2)}dq' & \text{se} \quad p > 0 \\ -\int_{q_-}^{q} \sqrt{2m(E(P) - \frac{1}{2}m\omega^2(q')^2)}dq' & \text{se} \quad p < 0 \end{cases}$$
dove $q_- = q_-(E(P))$ è la radice negativa di $\frac{m}{2}\omega^2q^2 = E(P)$, i.e., $q_- = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$.

3. Si scriva la trasformazione $p = p(q,P)$, $Q = Q(q,P)$ generata da G. La funzione $E(P)$ va fissata in modo tale che i due rami di tale trasformazione su $p > 0$ e $p < 0$ si "incollino" bene in $p = 0$. Si riconosca che:

   (a) la trasformazione è continua in $(q,p) = (q_-, 0)$ (i.e., i due rami si incollano in modo continuo in tale punto);

   (b) in $(q,p) = (q_+, 0^+)$, con $q_+ = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, il ramo con $p > 0$ dà $Q = E'(P)T/2$, mentre in $(q,p) = (q_+, 0^-)$ il ramo con $p < 0$ dà $Q = -E'(P)T/2$, con
   $$T = T(E(P)) = 2\int_{q_-}^{q_+} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E(P) - \frac{m\omega^2}{2}q^2)}}$$

   (c) imponendo che Q sia una variabile angolare (i.e., sia definita modulo 2π), si trova $E'(P) = 2\pi/T$. Mostrare che tale condizione implica che
   $$P(E) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_E} p\,dq = E/\omega$$
   dove γ_E è la curva di livello corrispondente all'energia E (di equazione $H(p,q) = E$). La variabile P è nota come variabile di *azione*, coniugata all'*angolo* Q.

4. In corrispondenza della scelta di $E(P)$ fatta sopra, si determini esplicitamente la trasformazione canonica $q = q(Q,P)$, $p = p(Q,P)$, che è definita globalmente su tutto il piano delle fasi e definisce una trasformazione invertibile da $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $\mathbb{T} \times (0, +\infty)$, con $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$. Si scriva esplicitamente anche l'espressione della trasformazione inversa $Q = Q(q,p)$, $P = P(q,p)$.

5. Si risolva l'equazione del moto per le variabili Q, P e si usi tale soluzione per ricavare la soluzione nelle variabili originali. Si riconosca che tale soluzione è quella usuale dell'oscillatore armonico.

SOLUZIONE

1. $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$. Quindi cerco una funzione $G(q,P)$ tale che

$$\tilde{H}(P) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 = E(P). \tag{25}$$

2. Da questa otteniamo banalmente che $\frac{\partial G}{\partial q} = \pm\sqrt{2m\left(E(P) - \frac{m}{2}\omega^2 q^2\right)}$ rispettivamente per $p > 0$ e $p < 0$. Una soluzione di questa equazione differenziale è quindi

$$G(q,P) = \begin{cases} \int_{q_-}^{q} \sqrt{2m(E(P) - \frac{1}{2}m\omega^2 (q')^2)}dq' & \text{se} \quad p > 0 \\ -\int_{q_-}^{q} \sqrt{2m(E(P) - \frac{1}{2}m\omega^2 (q')^2)}dq' & \text{se} \quad p < 0 \end{cases}$$

come si può verificare per sostituzione diretta.

3. Scriviamo esplicitamente la trasformazione:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial G}{\partial q} = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{m}{2}\omega^2 q^2\right)}, \\ Q = \frac{\partial G}{\partial P} = \pm E'(P)\int_{q_-}^{q} dq' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{m}{2}\omega^2 q'^2\right)}} \end{cases} \tag{26}$$

In particolare, nel limite in cui (q,p) tende a $(q_-, 0)$ dal semipiano superiore ($p \to 0^+$) o dal semipiano inferiore ($p \to 0^-$) l'espressione di $Q = Q(q,P)$ nella seconda equazione tende allo stesso limite, $Q = 0$. Se invece (q,p) tende a $(q_+, 0)$, l'espressione di $Q = Q(q,P)$ nella seconda equazione tende a due limiti (a priori) diversi, a seconda che $p \to 0^+$ o $p \to 0^-$: i due limiti sono, rispettivamente, $Q(q_+, 0^+) = \frac{1}{2}E'(P)T(E(P))$ e $Q(q_+, 0^-) = -\frac{1}{2}E'(P)T(E(P))$. Imponendo che questi due valori differiscano di 2π, troviamo

$$\frac{\partial E}{\partial P} = \frac{2\pi}{T(E(P))} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial E} = \frac{T(E)}{2\pi}$$

che implica (scegliendo, ad esempio, che $P(0) = 0$)

$$P(E) = \frac{1}{\pi}\int_0^E dE \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{m\omega^2}{2}q^2)}} = \frac{1}{\pi}\int_{q_-}^{q_+} dq \sqrt{2m\left(E - \frac{m}{2}\omega^2 q^2\right)}$$

e tale espressione non è nient'altro che $\frac{1}{2\pi}\times$(Area racchiusa dalla curva di livello γ_E). Nel nostro caso γ_E è l'ellisse di equazione cartesiana $\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E$, i cui semiassi sono $\sqrt{2mE}$ e $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. L'area di tale ellisse è quindi $\pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = 2\pi E/\omega$, da cui $P(E) = E/\omega \Leftrightarrow E(P) = \omega P$.

4. Calcoliamo esplicitamente l'integrale nella seconda delle (26): ricordando che $E(P) = \omega P$ troviamo

$$Q = \pm\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\int_{q_-}^{q} dq' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}(q')^2}} \tag{27}$$

Effettuando la sostituzione $x = \sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q'$ troviamo (ricordando che $q_- = -\sqrt{\frac{2E(P)}{m\omega^2}} = -\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}$)

$$Q = \pm\int_{-1}^{\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pm\left(\pi - \arccos\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}q\right) \tag{28}$$

$$q = -\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q$$

e, sostituendo nella prima delle (26),

$$p = \sqrt{2m\omega P}\sin Q$$

5. Le equazioni di Hamilton associate all'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P) = E(P) = \omega P$ per le variabili (Q,P) sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \omega, \\ \dot{P} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

da cui

$$\begin{cases} P = P_0, \\ Q = Q_0 + \omega t \end{cases} \tag{30}$$

che, se sostituite nell'espressione di $q = -\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q$ ci dà:

$$q(t) = -\sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\cos(Q_0 + \omega t),$$

che è la ben nota soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico.

Esercizio 4 Si consideri una lamina sottile di massa M e densità superficiale uniforme, la cui forma è un triangolo rettangolo con gli angoli al vertice $\pi/2$, $\pi/3$ e $\pi/6$.

1. Si determini la posizione del centro di massa.

2. Si calcolino gli assi e i momenti principali d'inerzia rispetto al vertice A, corrispondente all'angolo retto.

3. Si supponga di appendere la lamina al vertice A in presenza di gravità, e che la lamina sia libera di oscillare, mantenendo il punto A fisso, e rimanendo sempre nello stesso piano verticale. Si scriva la Lagrangiana del sistema, e si riconosca che le equazioni del moto sono equivalenti a quelle di un pendolo semplice, di lunghezza ℓ e massa m opportuni. Si calcolino ℓ ed m. Si identifichino le posizioni di equilibrio del corpo e il periodo delle piccole oscillazioni.

SOLUZIONE

1. Se chiamiamo L la lunghezza dell'ipotenusa, il cateto opposto all'angolo $\pi/6$ è lungo $L/2$, mentre quello opposto all'angolo $\pi/3$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}L$. In un sistema di riferimento in cui i vertici hanno coordinate (sul piano x-y) $A = (0,0)$, $B = L(\frac{1}{2}, 0)$, $C = L(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, la regione T occupata dalla lamina ha equazioni:

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{L}{2}, 0 \le y \le \sqrt{3}(\frac{L}{2} - x)\} \tag{31}$$

Il centro di massa del sistema ha coordinate (sul piano x-y) (x_G, y_G), con (ricordando che l'area del triangolo è $\sqrt{3}L^2/8$)

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{8}{\sqrt{3}L^2}\int_T x\,dxdy = \frac{8}{\sqrt{3}L^2}\int_0^{L/2} dx\,x \int_0^{\sqrt{3}(\frac{L}{2}-x)} dy = \frac{8}{\sqrt{3}L^2}\int_0^{L/2} dx\,x\sqrt{3}(\frac{L}{2} - x) \\ &= \frac{8}{L^2}\Big[\frac{L}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]\Big|_0^{L/2} = \frac{L}{6} \end{aligned} \tag{32}$$

e

$$
\begin{aligned}
y_G &= \frac{8}{\sqrt{3}L^2}\int_T y\,dxdy = \frac{8}{\sqrt{3}L^2}\int_0^{L/2} dx \int_0^{\sqrt{3}(\frac{L}{2}-x)} dy\, y = \frac{8}{\sqrt{3}L^2}\int_0^{L/2} dx\, \frac{3}{2}(\frac{L}{2}-x)^2 \\
&= -\frac{4}{\sqrt{3}L^2}\Big[\Big(\frac{L}{2}-x\Big)^3\Big]\Big|_0^{L/2} = \frac{\sqrt{3}}{6}L
\end{aligned} \tag{33}
$$

Si noti che, come giusto, il centro di massa coincide con il centro geometrico $\frac{1}{3}(A+B+C)$ del triangolo.

2. Gli elementi non nulli della matrice d'inerzia rispetto ad A sono:

$$
\begin{cases}
I_{11} = \frac{8M}{\sqrt{3}L^2}\int_T y^2\,dxdy, \\
I_{12} = I_{21} = -\frac{8M}{\sqrt{3}L^2}\int_T xy\,dxdy \\
I_{22} = \frac{8M}{\sqrt{3}L^2}\int_T x^2\,dxdy, \\
I_{33} = \frac{8M}{\sqrt{3}L^2}\int_T (x^2+y^2)\,dxdy = I_{11}+I_{22},
\end{cases} \tag{34}
$$

dove T è definita in (31). Eseguendo il calcolo come in (**??**)-(**??**) troviamo:

$$
\begin{cases}
I_{11} = \frac{ML^2}{8}, \\
I_{12} = I_{21} = -\frac{\sqrt{3}ML^2}{48}, \\
I_{22} = \frac{ML^2}{24}, \\
I_{33} = \frac{ML^2}{6}.
\end{cases} \tag{35}
$$

Quindi la matrice di inerzia è

$$
I = ML^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{48} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{48} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{36}
$$

Diagonalizzando la matrice si trova che $I_1 = \frac{ML^2}{24}(2+\frac{\sqrt{7}}{2})$, $I_2 = \frac{ML^2}{24}(2-\frac{\sqrt{7}}{2})$, $I_3 = \frac{ML^2}{6}$, e le direzioni principali d'inerzia sono

$$
\hat{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{14-4\sqrt{7}}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2-\sqrt{7} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{14+4\sqrt{7}}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2+\sqrt{7} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{37}
$$

3. Data la lamina sul piano x-z, con il punto A fisso, consideriamo il vettore $\mathbf{r}_G$ del centro di massa rispetto al vertice A. Sia θ l'angolo formato da tale vettore con l'asse verticale rivolto verso il basso, cosicché

$$
\mathbf{r}_G = \begin{pmatrix} \rho\sin\theta \\ 0 \\ -\rho\cos\theta \end{pmatrix} \tag{38}
$$

dove $\rho = L/3$ è la distanza di G da A.

La Lagrangiana del sistema è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) &= \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2 + Mg\rho\cos\theta = \\
&= \frac{1}{12}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{3}MgL\cos\theta.
\end{aligned} \tag{39}
$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$
\ddot{\theta} = -2\frac{g}{L}\sin\theta,
$$

che è la stessa di un pendolo semplice di lunghezza $L/2$ (la massa della lamina e/o del pendolo non giocano nessun ruolo nell'equazione del moto). Le posizioni di equilibrio del corpo corrispondono, come nel caso del pendolo, a $\theta = 0$ (stabile) e $\theta = \pi$ (instabile). Il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

Esercizio 5 Si consideri una piramide retta a base quadrata di lato di base ℓ e altezza h. La piramide ha massa M e densità volumetrica costante.

1. Si determini la posizione del centro di massa.
2. Si calcolino gli assi e i momenti principali d'inerzia rispetto al centro di massa.
3. Si supponga di lanciare in aria la piramide con l'asse della piramide inizialmente verticale, i.e., in modo tale che all'istante $t = 0$ l'asse d'inerzia $\hat{\eta}_3$ coincida con l'asse verticale fisso $\hat{e}_3$. Si supponga che la velocità $\vec{v}_G(0)$ assegnata inizialmente al centro di massa abbia componente lungo $\hat{e}_3$ positiva, e che la velocità angolare $\vec{\omega}(0)$ attorno al centro di massa assegnata inizialmente al corpo giaccia sul piano orizzontale, i.e., $\omega_3 = 0$. Si determini il moto risultante, distinguendo il moto traslatorio del centro di massa e il moto rotatorio attorno al centro di massa.

SOLUZIONE

1. In un sistema di riferimento in cui la base appartiene al piano x-y (con il centro della base coincidente con l'origine e i lati della base paralleli agli assi x e y) e l'asse della piramide coincide con l'asse $\hat{e}_3$, la regione P occupata dalla piramide ha equazioni

$$P = \{(x, y, z) : 0 \le z \le h, -\frac{1}{2}\ell(z) \le x \le \frac{1}{2}\ell(z), -\frac{1}{2}\ell(z) \le y \le \frac{1}{2}\ell(z)\}$$

con $\ell(z) = \ell(1 - \frac{z}{h})$. Il volume di tale regione è $\frac{1}{3}\ell^2 h$. Per simmetria, il centro di massa appartiene all'asse z, i.e., ha coordinate $(0, 0, z_G)$, con

$$z_G = \frac{3}{\ell^2 h}\int_0^h dz\, z\ell^2(z) = \frac{h}{4}$$

2. Per simmetria, gli assi di inerzia coincidono con gli assi del sistema di riferimento. I momenti principali di inerzia sono

$$\begin{cases} I_1 = \frac{3M}{\ell^2 h}\int_P (y^2 + z^2)dxdydz = \frac{3M}{\ell^2 h}\int_P (x^2 + z^2)dxdydz = I_2 \\ I_3 = \frac{3M}{\ell^2 h}\int_P (x^2 + y^2)dxdydz. \end{cases} \tag{40}$$

Calcoliamo gli integrali coinvolti:

$$\int_P x^2 dxdydz = \int_0^h dz \int_{-\ell(z)/2}^{\ell(z)/2} dy \int_{-\ell(z)/2}^{\ell(z)/2} dx\, x^2 = \frac{1}{12}\int_0^h dz\ell^4(z) = \frac{\ell^4 h}{60} \tag{41}$$

$$\int_P y^2 dxdydz = \frac{\ell^4 h}{60} \tag{42}$$

$$\int_P z^2 dxdydz = \int_0^h dz\, z^2\ell^2(z) = \frac{\ell^2 h^3}{30} \tag{43}$$

Sostituendo nella (40) troviamo

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{20}M\ell^2 + \frac{1}{10}Mh^2, \qquad I_3 = \frac{1}{10}M\ell^2.$$

3. Poniamo all'istante iniziale il sistema di riferimento in modo tale che $\hat{\eta}_1 \parallel \hat{x}$, $\hat{\eta}_2 \parallel \hat{y}$ e $\hat{\eta}_3 \parallel \hat{z}$: ovvero all'istante iniziale il sistema di riferimento fisso e quello mobile solidale agli assi di inerzia della piramide coincidono. Il moto traslatorio del centro di massa è un moto accelerato uniforme (con accelerazione $\boldsymbol{g} = -g\hat{e}_3$), la cui traiettoria è una parabola rivolta verso il basso. Per quanto riguarda il moto rotatorio attorno al centro di massa, notiamo che all'istante iniziale $\Omega_i(0) = \omega_i(0)$, $i = 1, 2, 3$ (come al solito, $\omega_i(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \hat{e}_i$ sono le componenti del vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ rispetto alla base fissa $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ all'istante t, mentre $\Omega_i(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \hat{\eta}_i(t)$ sono le componenti dello stesso vettore rispetto alla base mobile $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$). In particolare, dato che la velocità angolare iniziale ha terza componente nulla, i.e., $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2$, troviamo $\Omega_1(0) = \omega_1(0)$, $\Omega_2(0) = \omega_2(0)$, $\Omega_3(0) = 0$. La velocità angolare $\Omega_i(t)$ si ottiene risolvendo le equazioni di Eulero, che nel caso $I_1 = I_2$ prendono la forma

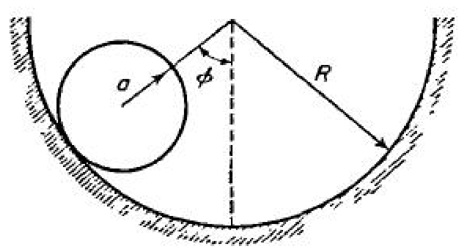
$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = (I_1 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\ \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = 0 \end{cases} \tag{44}$$

Dalla terza equazione si trova $\Omega_3(t) = \Omega_3(0) = 0$. Risostituendo questa relazione nelle equazioni per Ω_1 e Ω_2 troviamo $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = 0$, cosicché $\Omega_1(t) = \omega_1(0)$, $\Omega_2(t) = \omega_2(0)$. Di conseguenza, nel sistema di riferimento mobile, $\boldsymbol{L}(t) = I_1\boldsymbol{\Omega}(t) = I_1\boldsymbol{\Omega}(0) = \boldsymbol{L}(0)$ e, se B è la matrice di cambiamento di coordinate dalla base di riferimento mobile a quella fissa,

$$\boldsymbol{\ell} = B\boldsymbol{L}(t) = I_1 B\boldsymbol{\Omega}(t) = I_1\boldsymbol{\omega}(t).$$

In conclusione, $\boldsymbol{\omega}(t)$ rimane costante, ovvero la piramide ruota a velocità angolare costante attorno a un asse orizzontale, la cui direzione è a tutti i tempi identica a quella assegnata all'istante iniziale.

Esercizio 6 Un cilindro omogeneo di massa M e raggio a rotola senza strisciare sulla superficie interna di un cilindro cavo di raggio interno R (vedi figura), il cui asse è in posizione orizzontale. Il cilindro di raggio a si muove sotto l'effetto della forza di gravità. Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\phi, \dot{\phi})$ (con ϕ scelto come in figura) e si risolva il moto per quadrature. Si identifichi il punto di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni.



SOLUZIONE

Il centro di massa si muove su una circonferenza di raggio $R - r$. In un sistema di coordinate centrato sull'asse della superficie cilindrica di raggio R, la posizione del centro di massa ha la forma

$$\boldsymbol{x} = (R - a)\begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \end{pmatrix} \tag{45}$$

cosicché

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (R - a)\dot{\phi}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{46}$$

da cui $|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = (R-a)^2\dot{\phi}^2$. Quindi, evocando il teorema di Köning, e ricordando che il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse centrale è $I = \frac{Ma^2}{2}$, scriviamo la Lagrangiana nella forma

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{Ma^2}{2}\Big)\omega^2 + Mg(R-a)\cos\phi, \tag{47}$$

dove, chiamando v_G la velocità del centro di massa del cilindro di raggio a, $\omega = v_G/a$ è la velocità angolare di rotazione del cilindro di raggio a attorno al suo asse. Ricordando che $v_G = |\dot{\boldsymbol{x}}| = (R-a)\dot{\phi}$, troviamo $\omega = \frac{R-a}{a}\dot{\phi}$, cosicché:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}Ma^2\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange risultante è

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\sin\theta, \tag{48}$$

cheè identica a quella di un pendolo semplice di lunghezza $\frac{3}{2}(R-a)$, per la cui soluzione rimandiamo a quella discussa a lezione (vedi anche le dispense del Prof. Gentile, Cap. 5.23). In particolare, il punto di equilibrio stabile corrisponde al cilindro di raggio a fermo sul fondo della superficie cilindrica di raggio R ($\phi = 0$), e il periodo delle piccole oscillazioni è $T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}}$.