Soluzioni 3^o tutorato - MA - 11/3/2015

Esercizio 1 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$

$$\ddot{x} = x(1+x^2)^\alpha \tag{1}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

1. Si ricostruisca la forma del potenziale $V(x)$, sapendo che $\ddot{x} = -V'(x)$.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si identifichino i punti di equilibrio, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia corrispondenti ai punti di equilibrio.
4. Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare corrispondenti ai valori critici dell'energia, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E.
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
6. Si discuta al variare di α se le soluzioni aperte (i.e., tali che $x(t)$ non rimane limitato) sono globali nel tempo o no.

SOLUZIONE

$-V'(x) = x(1+x^2)^\alpha$. Quindi

$$V(x) = \begin{cases} -\int x(1+x^2)^\alpha dx = -\frac{(1+x^2)^{(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} + C \text{ se } \alpha \neq -1 \\ -\int \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + C' \text{ se } \alpha = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Scegliamo $C = C' = 0$ per comodità cosicché il potenziale al variare di α prende la forma

$$V(x) = V_\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2(\alpha+1)}(1+x^2)^{(\alpha+1)} & \text{se} \quad \alpha \neq -1 \\ -\frac{1}{2}\log(1+x^2) & \text{se} \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

Per lo studio del grafico di $V_\alpha(x)$, notiamo che $V_\alpha(x) \leq 0$ per ogni x e $= 0$ solo se $\alpha = -1$ e $x = 0$. Inoltre:

$$V'(x) = -x(1+x^2)^\alpha \begin{cases} > 0 \text{ se } x < 0, \\ = 0 \text{ se } x = 0, \\ < 0 \text{ se } x > 0. \end{cases} \tag{3}$$

quindi in 0 il potenziale ha sempre il massimo assoluto. La derivata seconda è

$$V''(x) = -(x^2+1)^{(\alpha-1)}(x^2(2\alpha+1)+1)$$

- CASO $\alpha > -\frac{1}{2}$, $V''(x) < 0$ per ogni valore di x.
- CASO $\alpha < -\frac{1}{2}$, allora $V''(x) < 0$ per $|x| < \sqrt{-\frac{1}{1+2\alpha}}$ e $V''(x) > 0$ per $|x| > \sqrt{-\frac{1}{1+2\alpha}}$

In tutti i casi $V''(0) < 0$, quindi l'unico punto di equilibrio $x_0 = 0$ è sempre instabile per il criterio del linearizzato. Il livello critico di energia corrispondente è

$$V_\alpha(0) = \begin{cases} -1/(2(\alpha+1)) \text{ se } \alpha \neq -1, \\ 0 \text{ se } \alpha = -1. \end{cases} \tag{4}$$

Il grafico di $V_\alpha(x)$ risultante dalla discussione precedente, al variare di α, è illustrato in Fig. (1).

Dal grafico del potenziale, ricostruiamo poi la forma delle curve di livello usando la loro equazione in termini del potenziale, $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V_\alpha(x))}$, il cui grafico è riportato in figura 2.

Il comportamento qualitativo delle orbite risultante dal grafico delle curve di livello è il seguente:

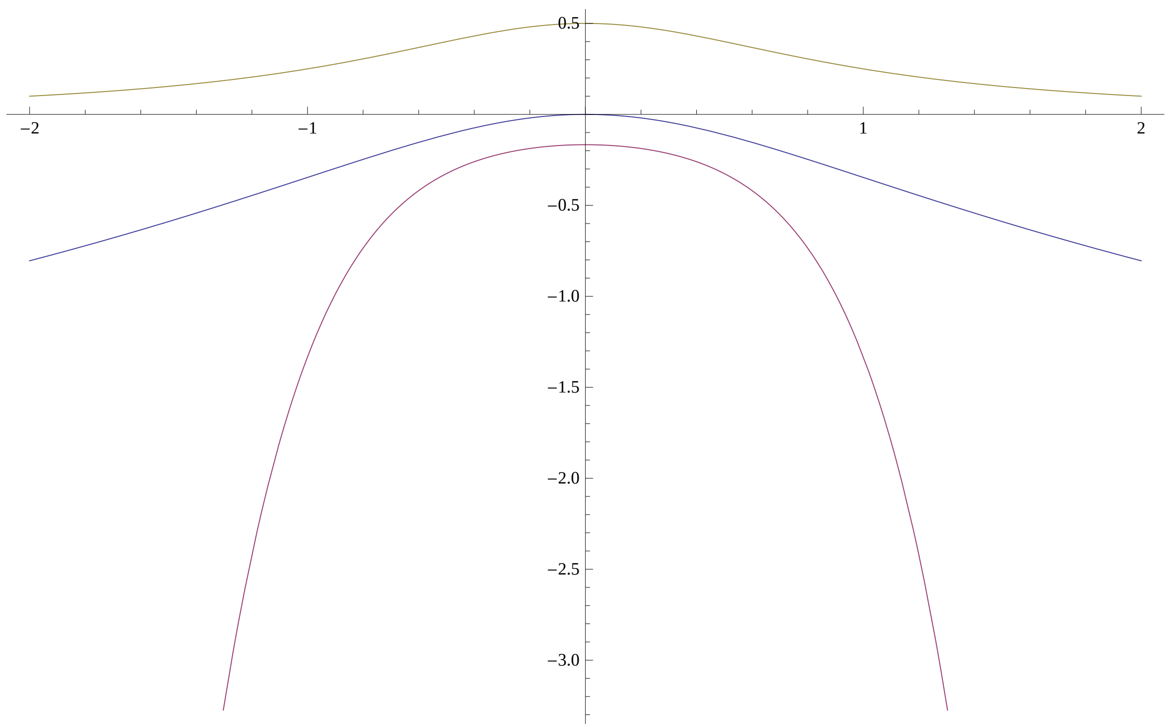

Figure 1: Grafico del potenziale per diversi valori di α: in viola il caso $\alpha = 2$, in blu il caso $\alpha = -1$ (potenziale logaritmico), in marrone il caso $\alpha = -2$.

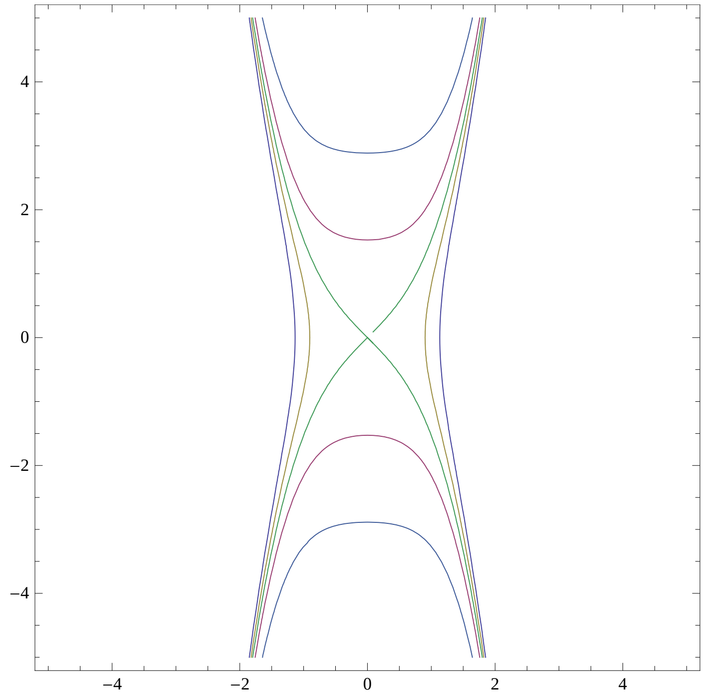

Figure 2: Curve di livello nel caso $\alpha = 2$. Per altri valori di α il comportamento qualitativo delle curve è simile.

- Se il sistema parte con velocità nulla in $x = 0$, il moto è costante.
- Tutti gli altri dati iniziali producono moti aperti, che tendono a $\pm\infty$ sia nel passato che nel futuro, con l'eccezione del moto sulla sepratrice, $E = V_\alpha(0)$, il quale o nel passato o nel futuro (a seconda del segno della velocità) è asintotico alla posizione di equilibrio instabile $(0, 0)$, che viene raggiunto in tempo infinito.

6) Consideriamo un dato iniziale $(x_0, \dot{x}_0)$ corrispondente ad un moto aperto. Supponiamo, ad esempio, che il moto tenda asintoticamente nel futuro a $+\infty$. Il tempo T_∞ per raggiungere l'infinito è:

- CASO $\alpha \neq -1$

$$T_\infty = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E + \frac{(1+x^2)^{(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)})}} \tag{5}$$

Se $\alpha < -1$, la funzione integranda tende a costante $(1/\sqrt{2E})$ per $x \to \infty$. Dato che la funzione costante ovviamente non è integrabile a infinito, $T_\infty = +\infty$, quindi il moto in questo caso è definito globalmente. Se $\alpha > -1$, per x grandi la funzione integranda si comporta come $\sqrt{\alpha+1}\,|x|^{-(\alpha+1)}$, che è integrabile all'infinito se e solo se $\alpha + 1 > 1$. Quindi

$$T_\infty \begin{cases} = \infty \text{ se } \alpha \leq 0 \\ < \infty \text{ se } \alpha > 0 \end{cases} \tag{6}$$

In conclusione, se $\alpha \leq 0$ con $\alpha \neq -1$, il moto è definito globalmente, ovvero per $t \in (-\infty, +\infty)$.
Se $\alpha > 0$ il moto diverge a infinito in tempo finito, e la soluzione quindi non è definita globalmente nel tempo.

- CASO $\alpha = -1$

$$T_\infty = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2(E + \frac{1}{2}\log(1+x^2))}} \tag{7}$$

che è $= +\infty$, poiché la funzione integranda si comporta per x grandi come $1/\sqrt{\log x^2}$, che non è integrabile all'infinito. Quindi in questo caso il moto è definito globalmente.

Esercizio 2 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$\ddot{x} = -V'(x), \tag{8}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

1. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
2. Si identifichino due punti di equilibrio, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia corrispondenti ai punti di equilibrio.
3. Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare corrispondenti ai valori critici dell'energia, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E.
4. Discutere la stabilità del punto $(0, 0)$
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.

SOLUZIONE

Vedi la soluzione all'esercizio 3 del tutorato del corso di FM210, A.A. 2013/2014, disponibile online a: `http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/Tutorato3bis.pdf`

Esercizio 3 (Lennard - Jones) Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{10}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{6}\right) \tag{11}$$

dove $V_0, x_0 > 0$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di V, quindi delle curve di livello al variare di E, etc.)
2. Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
3. Scelto un dato iniziale x_i corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da x_i a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?

SOLUZIONE

Osservazione: $V(x) = V(-x)$*, quindi il potenziale è simmetrico per scambio di segno* $x \to -x$*. Quindi senza perdita di generalità possiamo restringerci al caso* $x = |x| > 0$*.*

Il grafico del potenziale e le curve di livello, nonché alcune animazioni del moto nello spazio fisico e nello spazio delle fasi, sono disponibili a questo link:
`http://ian.jauslin.org/teaching/animations1d/animations.php?system=lennard-jones-html5`.

I moti a energia negativa sono limitati e periodici, mentre i moti a energia $E \geq 0$ sono aperti. Il caso $E = 0$ corrisponde a moti critici, che arrivano all'infinito con velocità nulla.

I moti a energia negativa non banali (i.e., diversi dal moto costante sul punto di equilibrio $x = \sqrt[6]{2}x_0$) hanno periodo

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} \tag{12}$$

dove $x_\pm$ sono le due soluzioni di $V(x) = E$ per $-V_0/4 < E < 0$.
Fissiamo ora $E \geq 0$, quindi i moti sono aperti per ogni dato iniziale. Il tempo che il sistema impiega per arrivare a $+\infty$ (una discussione analoga è valida per $-\infty$) è

$$T_\infty = \sqrt{m} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{E + V_0(\frac{x_0^6}{x^6} - \frac{x_0^{12}}{x^{12}})}} \tag{13}$$

che è un integrale divergente, quindi il moto è definito globalmente.

Esercizio 4 (Piccole Oscillazioni)

PARTE UNO Considerare l'oscillatore armonico

$$m\ddot{x} = -kx = -V'(x), \tag{14}$$

con $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si disegnino le curve di livello del sistema. Come noto, tutti i moti del sistema sono periodici di periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Si verifichi questo fatto procedendo nel modo seguente: si fissi un valore dell'energia $E > 0$; si calcoli il periodo del moto corrispondente in termini si un integrale definito (si calcolino in particolare i punti di inversione $x_\pm(E)$, che appaiono come estremi di integrazione); si calcoli tale integrale esplicitamente, e si verifichi che il suo valore è *indipendente* dalla scelta di E.

PARTE DUE Si consideri ora un generico potenziale $U(x)$, che ammette un punto x_0 di minimo locale isolato non degenere *ovvero* $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) > 0$. Si consideri un moto periodico di energia $E = U(x_0)+\epsilon^2$, e si calcoli il periodo delle oscillazioni $T(\epsilon)$ corrispondenti a tale energia in termini di un integrale definito, per ϵ abbastanza piccolo (affinché il moto considerato consista effettivamente in oscillazioni periodiche attorno a x_0). Si calcoli il periodo nel limite di *piccole oscillazioni*, i.e., si calcoli $\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon)$. [*Suggerimento:* si sviluppi la funzione $E - U(x)$ che appare nell'espressione della funzione integranda in $T(\epsilon)$ in serie di Taylor attorno ad x_0 al second'ordine. Si osservi che, trascurando i termini di ordine $(x-x_0)^3$ o superiori, l'espressione da calcolare si riduce a quella della PARTE UNO. Si dimostri infine che, nel limite $\epsilon \to 0$, i termini di ordine superiore al secondo sono effettivamente trascurabili, i.e., producono una correzione $O(\epsilon)$ al calcolo di $T(\epsilon)$, quindi $\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon)$ è uguale al valore che si ottiene rimpiazzando $E - U(x)$ nell'integrale con la sua approssimazione di Taylor del second'ordine attorno ad x_0.]

Si usi tale risultato per calcolare il periodo delle piccole oscillazioni per i seguenti esempi:

1. pendolo matematico attorno alla sua posizione di equilibrio stabile;

2. Lennard-Jones (vedi Esercizio 3) attorno al suo punto di equilibrio stabile;
3. doppia buca ($m\ddot{x} = ax - bx^3$, con $a, b > 0$) attorno ai suoi punti di equilibrio stabile.

SOLUZIONE

PARTE UNO $E = U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ in $x_\pm = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$. Il periodo dei moti oscillatori è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}} \tag{15}$$

L'integrale al membro di destra lo risolvo per sostituzione ponendo $y = (x - x_-)/(x_+ - x)$, trovando così

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^\infty \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left[2\arctan\sqrt{y}\right]\Big|_0^\infty = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

indipendentemente dal valore di E.

PARTE DUE Sia x_0 un punto di equilibrio stabile. Fissiamo l'energia $E = U(x_0) + \epsilon^2$, con $\epsilon > 0$ piccolo tale che il moto sia un moto periodico intorno al punto di equilibrio x_0. Allora, il moto oscillatorio si svolge tra le due soluzioni di $U(x) = E$. Sviluppiamo $U(x)$ in serie di Taylor intorno ad x_0:

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3. \tag{16}$$

Quindi, considerando il fatto che $U'(x_0) = 0$ e $U''(x_0) > 0$, troviamo

$$\frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2\Big(1 + O(x - x_0)\Big) = \epsilon^2 \tag{17}$$

che ha soluzione (usando il teorema della funzione implicita) $x_\pm = x_0 \pm \sqrt{\frac{2}{U''(x_0)}}\,\epsilon + O(\epsilon^2)$. Analogamente ottengo:

$$E - U(x) = \frac{U''(x_0)}{2}(x_+ - x)(x - x_-)\Big(1 + O(\epsilon)\Big) \tag{18}$$

Vogliamo calcolare

$$T(\epsilon) = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \tag{19}$$

nel limite $\epsilon \to 0$. Usando la (18) otteniamo:

$$T(\epsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)(1 + O(\epsilon))}} \tag{20}$$

che, a meno di un errore relativo $(1 + O(\epsilon))$, ha la stessa forma del membro di destra della (15), con k rimpiazzato da $U''(x_0)$.

Usando il cambio di variabile descritto nella parte uno, $y = (x - x_-)/(x_+ - x)$, troviamo quindi

$$T(\epsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}(1 + O(\epsilon))\int_0^\infty \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y}},$$

che implica che il periodo delle piccole oscillazioni è

$$\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}} \tag{21}$$

Con questa formula generale otteniamo immediatamente il periodo delle piccole oscillazioni per i casi richiesti:

1. pendolo matematico attorno alla sua posizione di equilibrio stabile, $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$. In questo caso la massa effettiva è $m = 1$, il potenziale è $U(x) = \omega_0^2(1 - \cos\theta)$, e il punto di equilibrio stabile è $\theta = 0$. Si ha quindi $U''(0) = \omega_0^2$, e il periodo delle piccole oscillazioni è $\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon) = 2\pi/\omega_0$.

2. Lennard-Jones (vedi Esercizio 3) attorno al suo punto di equilibrio stabile. Come discusso nell'esercizio 3, il punto di equilibrio stabile è $x = 2^{1/6}x_0$ e

$$V''(2^{1/6}x_0) = \frac{V_0}{x^2}\left(13 \cdot 12\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - 7 \cdot 6\left(\frac{x_0}{x}\right)^{6}\right)\Big|_{x=2^{\frac{1}{6}}x_0} = 18 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\frac{V_0}{x_0^2}$$

   Quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon) = \frac{2^{\frac{2}{3}}\pi}{3}x_0\sqrt{\frac{m}{V_0}} \tag{22}$$

3. doppia buca ($m\ddot{x} = ax - bx^3$, con $a, b > 0$) attorno ai suoi punti di equilibrio stabile. In questo caso $U(x) = \frac{b}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2$ e i punti di equilibrio stabile sono $x_\pm = \pm\sqrt{a/b}$, cosicché $U''(\pm\sqrt{a/b}) = 2a$ e

$$\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2a}}$$