

4° tutorato - MA - 18/3/2015

Esercizio 1 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(\rho) = V_0 \left(\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^6 \right) \quad (1)$$

dove $V_0, r_0 > 0$. Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

SOLUZIONI

1. Il potenziale efficace è

$$V_{eff}(\rho) = V_0 \left(\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^6 \right) + \frac{L^2}{2m\rho^2}, \quad (2)$$

i cui limiti agli estremi del dominio sono banalmente

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = 0 \quad (3)$$

L'equazione del moto radiale è

$$m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho) \quad (4)$$

e corrispondentemente l'energia meccanica totale

$$E = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) \quad (5)$$

è una quantità conservata. Per trovare i valori critici dobbiamo studiare

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{-mV_0r_0^{10} + mV_0r_0^6\rho^4 - L^2\rho^8}{m\rho^{11}}. \quad (6)$$

Facendo la sostituzione $\rho^4 = t$ otteniamo che le radici dell'equazione sono in

$$t_{1,2} = r_0^4 \frac{mV_0r_0^2 \pm \sqrt{mV_0r_0^2(mV_0r_0^2 - 4L^2)}}{2L^2} \quad (7)$$

Quindi al variare dei parametri, V_{eff} può avere 0, 1 o 2 punti critici. Più precisamente

- CASO $L^2 < \frac{mV_0r_0^2}{4}$: la derivata ha due zeri in $t = t_{1,2}$; quindi, ricordando che l'interpretazione fisica della variabile ρ richiede $\rho > 0$, i valori di $\rho > 0$ per cui V_{eff} si annulla sono due:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0r_0^2 + \sqrt{mV_0r_0^2(mV_0r_0^2 - 4L^2)}}{2L^2}}, \\ \rho_2 &= r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0r_0^2 - \sqrt{mV_0r_0^2(mV_0r_0^2 - 4L^2)}}{2L^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

ed è facile verificare che ρ_1 è massimo locale, mentre ρ_2 è minimo locale.

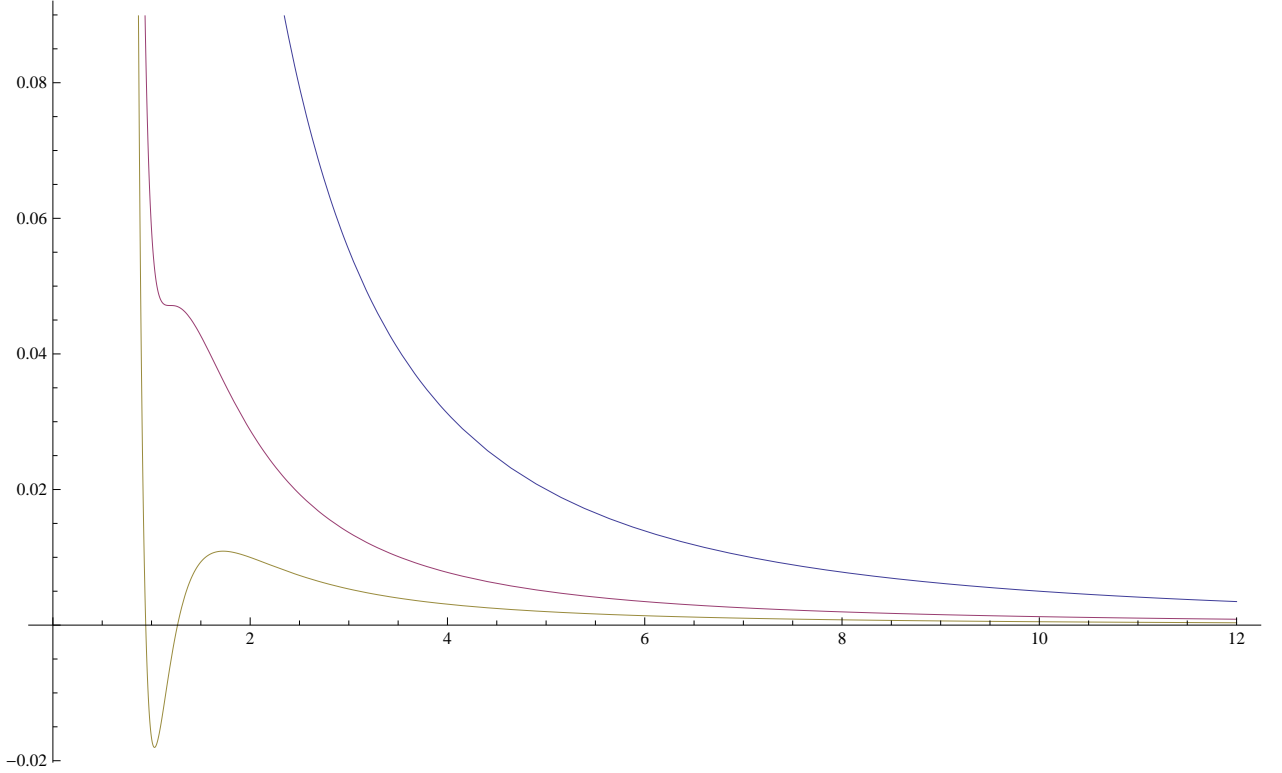


Figure 1: Grafico di V_{eff} , con valori dei parametri scelti nei tre diversi casi qualitativi descritti.

- CASO $L^2 = \frac{mV_0 r_0^2}{4}$ esiste un solo punto critico, $t_0 = \frac{mV_0 r_0^6}{2L^2}$, quindi $\rho_0 = r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0 r_0^2}{2L^2}}$ (le radici negative o complesse vengono di nuovo scartate, come al punto precedente, poiché $\rho > 0$), che è un punto di flesso;
- CASO $L^2 > \frac{mV_0 r_0^2}{4}$ non ci sono punti critici (ovvero il potenziale è monotono decrescente).

Il grafico delle curve di livello è mostrato in figura solo per il primo caso. La soluzione per quadrature sul semipiano superiore dello spazio delle fasi ridotto radiale ($\dot{\rho} \geq 0$) con dato iniziale $\rho(0)$ a $t = 0$ è

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = t$$

e un'espressione analoga è valida come al solito per le porzioni di traiettoria nel semipiano inferiore dello spazio delle fasi ridotto.

L'unico caso in cui sono presenti moti periodici radiali non banali è $L^2 < \frac{mV_0 r_0^2}{4}$. In questo caso, se E è maggiore del minimo, l'equazione $E = V_{eff}(\rho)$ ammette due soluzioni positive, chiamiamole ρ_i e ρ_f (con $\rho_i < \rho_f$). Allora, il periodo del moto radiale è

$$T_0 = 2 \int_{\rho_i}^{\rho_f} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} \quad (9)$$

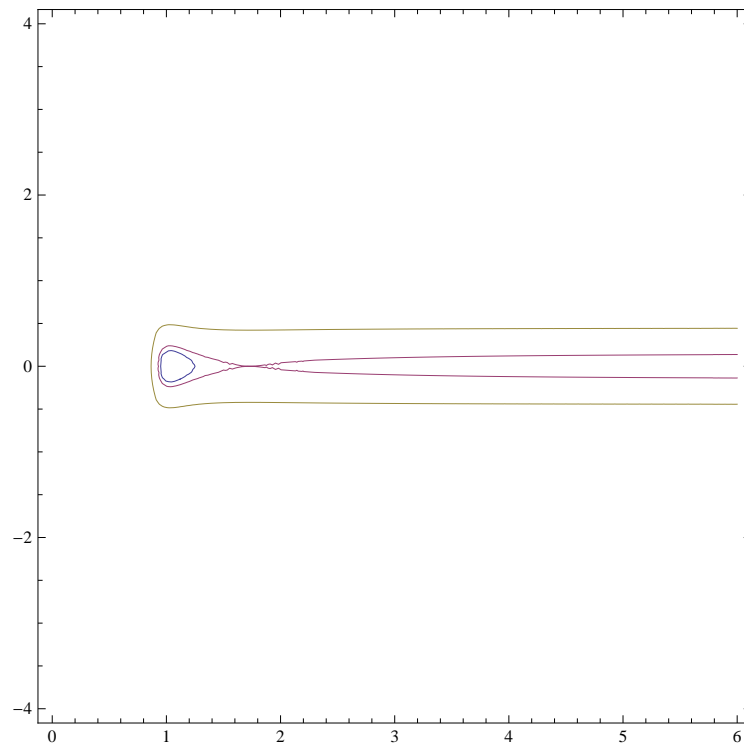


Figure 2: Esercizio 1 Grafico delle curve di livello nel caso di esistenza di moti periodici.

2. Dalla conservazione del momento angolare sappiamo che

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (10)$$

da cui otteniamo la soluzione

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} \quad (11)$$

dove $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature del moto radiale ottenuta sopra.

Nei casi, discussi sopra, in cui il moto radiale è periodico e non banale, la legge oraria di θ si può scrivere come sovrapposizione di due moti periodici di periodi $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e $T_0 = 2\pi/\omega_0$:

$$\theta(t) = f(\omega_1 t) + g(\omega_0 t), \quad \text{dove} \quad f(\omega_1 t) = \theta_0 + \omega_1 t, \quad g(\omega_0 t) = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} - \omega_1 t,$$

con

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} \int_{\rho_i}^{\rho_f} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}. \quad (12)$$

3. Un caso in cui il moto complessivo è sicuramente periodico è quello in cui la variabile radiale si muove di moto banale, i.e., $\rho(t) \equiv (\text{cost.})$, che è un caso che si verifica per $L^2 \leq \frac{1}{4}mV_0r_0^2$ e dato iniziale corrispondente a un punto di equilibrio di V_{eff} . In questi casi, $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$ (dove ρ_{eq} può essere ρ_1 o ρ_2 nel caso $L^2 < \frac{1}{4}mV_0r_0^2$, oppure ρ_0 nel caso $L^2 = \frac{1}{4}mV_0r_0^2$), mentre θ si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2} t \quad (13)$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di periodo

$$T = 2\pi \frac{m\rho_{eq}^2}{L} \quad (14)$$

Se invece il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0 , la condizione necessaria affinché il moto complessivo sia periodico è che l'incremento della variabile angolare in un periodo T_0 , $\Delta\theta = \omega_1 T_0$, con ω_1 definito in (12), sia multiplo razionale di 2π , i.e.,

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_i}^{\rho_f} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = 2\pi \frac{k}{n}, \quad (15)$$

per qualche $k, n \in \mathbb{Z}$, nel qual caso il moto complessivo è periodico di periodo $nT_0 = kT_1$. In caso contrario il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio (sia dello spazio fisico che dello spazio delle fasi).

Esercizio 2: L'oscillatore Armonico Tridimensionale Sia $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa m e posizione \mathbf{r} soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante $k > 0$:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}. \quad (16)$$

1 Si riconosca che il sistema è conservativo e si calcoli l'energia potenziale $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$.

Sia $L = |\mathbf{L}|$ il modulo del momento angolare. Supponendo $L \neq 0$ si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, seguendo la strategia risolutiva generale dei moti in campo centrale. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito. *Si risolva tale integrale, calcolando esplicitamente il periodo del moto radiale*
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito. *Si risolva tale integrale, calcolando esplicitamente il secondo periodo del moto angolare.*
3. Si riconosca che il moto complessivo è periodico per ogni scelta dei dati iniziali. Si calcoli l'equazione della traiettoria. Si dimostri che la traiettoria è un'ellisse centrata nell'origine.

SOLUZIONI

1. L'equazione del moto è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}. \quad (17)$$

quindi $U(\mathbf{r}) = \frac{k\mathbf{r}^2}{2} = V(|\mathbf{r}|)$, con $V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2$. Il potenziale dipende solo dalla distanza $\rho = |\mathbf{r}|$ quindi per la teoria generale dei moti in campo centrale, si ha conservazione sia dell'energia meccanica che del momento angolare. Supponiamo, come richiesto, che $L = |\mathbf{L}| \neq 0$. L'espressione dell'energia meccanica in coordinate radiali è

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho), \quad \text{con} \quad V_{eff}(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m\rho^2}. \quad (18)$$

Studiamo il potenziale $V_{eff}(\rho)$: cerchiamo i punti di equilibrio:

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{mk\rho^4 - L^2}{m\rho^3} \quad (19)$$

quindi (considerando che ρ è definito positivo) l'unico punto di equilibrio è $\rho_0 = \sqrt{\frac{L}{\sqrt{mk}}}$. Si verifica immediatamente che $V''_{eff}(\rho) > 0$ per ogni $\rho > 0$, quindi il punto di equilibrio è un minimo, e corrisponde a un punto di equilibrio stabile del moto radiale. Inoltre $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = \infty$, quindi per ogni valore di $E > V_{eff}(\rho_0)$ esistono due radici dell'equazione $E = V_{eff}(\rho)$, e i moti sono tutti periodici tra questi due valori di ρ (nel caso critico $E = V_{eff}(\rho_0)$ l'equazione ammette un'unica radice $\rho = \rho_0$ e il moto di ρ è banale, $\rho(t) \equiv \rho_0$). I grafici del potenziale efficace e delle curve di livello sono riportati nelle figure (3) e (4).

Fissiamo $E > V_{eff}(\rho_0)$. Siano ρ_+ e ρ_- le due radici di $V_{eff}(\rho) = E$. Il periodo dei moti oscillatori è

$$T_0 = \sqrt{2m} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{E - \frac{1}{2}k\rho^2 - \frac{1}{2}\frac{L^2}{m\rho^2}}}. \quad (20)$$

2. Per quanto riguarda la legge orario del moto angolare, come al solito, se $\rho(t) \equiv \rho_0$ allora il moto di θ è rettilineo uniforme

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_0^2}t \quad (21)$$

e quindi il moto complessivo è moto circolare uniforme di velocità angolare $\frac{L}{m\rho_0^2}$.

Se il moto di ρ è periodico non banale, allora in generale

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t ds \frac{L}{m\rho^2(s)} \quad (22)$$

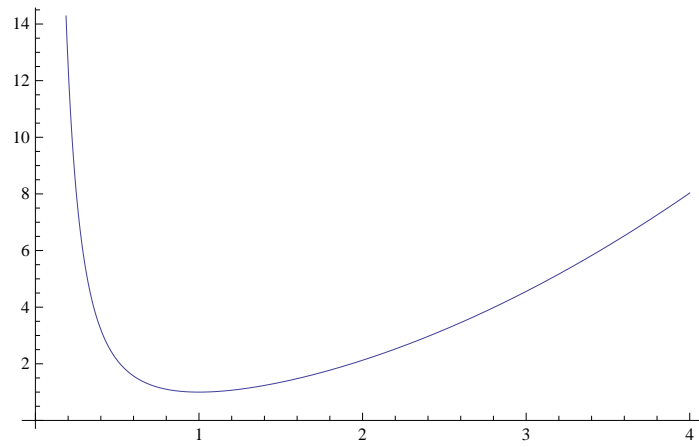


Figure 3: Grafico di V_{eff} , con $\omega = m = L = 1$

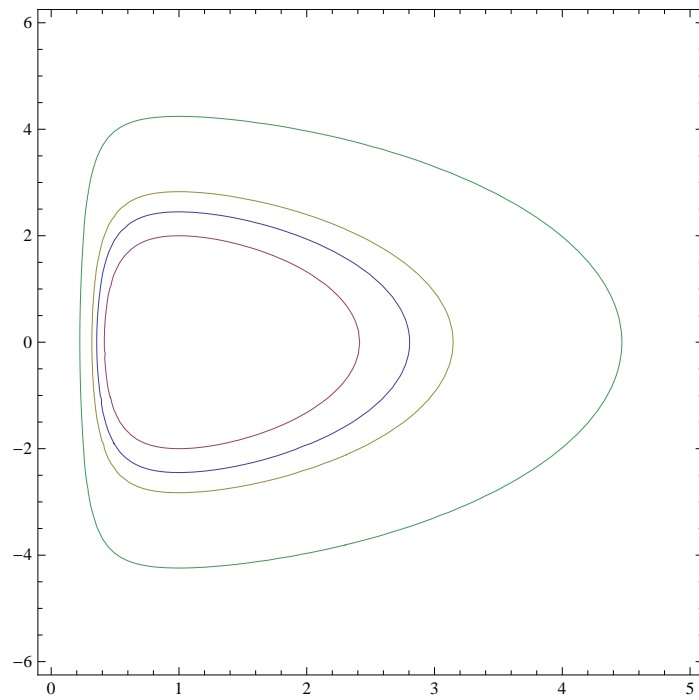


Figure 4: Grafico delle curve di livello per il moto radiale, con $\omega = m = L = 1$.

e tale espressione si scrive come sovrapposizione di due moti periodici, uno di periodo T_0 (lo stesso del moto radiale) e uno di periodo $T_1 = 2\pi/\omega_1$, con

$$\omega_1 = \frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{2}{m}} L \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{E - \frac{1}{2}k\rho^2 - \frac{1}{2} \frac{L^2}{m\rho^2}}}.$$

Il calcolo esplicito di questi integrali mostra che $T_1 = 2T_0$, per qualsiasi scelta di E, L , e quindi il moto complessivo è *sempre* periodico. Il calcolo della traiettoria mostra che il moto si svolge su un'ellisse centrata nel centro della forza. Per dettagli sul calcolo dei periodi e della traiettoria, consultare il capitolo 7.31 del libro del Prof G. Gentile, disponibile al seguente link: <http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/FM1/testo/cap7.pdf>.

Esercizio 3 Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale centrale

$$V(\rho) = \left(-\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{3\rho^3} \right) \quad (23)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del modulo L del momento angolare, si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
4. nei casi in cui il moto consiste in una caduta verso il centro, si discuta se il tempo di caduta è finito o infinito.

SOLUZIONE

1.

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{3\rho^3} + \frac{L^2}{2\rho^2} \quad (24)$$

e consideriamo esplicitamente solo il caso $L \neq 0$. Prima di tutto notiamo che

- CASO $\alpha > 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = -\infty \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = 0 \quad (25)$$

- CASO $\alpha \leq 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = \infty \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = 0 \quad (26)$$

Cerchiamo i punti di equilibrio di tale potenziale

$$V'_{eff}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho^4} - \frac{L^2}{\rho^3} = \frac{\rho^2 + \alpha - \rho L^2}{\rho^4} \quad (27)$$

da cui $V'_{eff}(\rho) = 0$ nei punti $\rho_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 4\alpha}}{2}$, se questi risultano positivi. Se $\alpha \leq 0$ c'è un unico valore di $\rho > 0$ per cui la derivata si annulla, $\rho = \rho_+$; in questo caso il grafico di V_{eff} è qualitativamente lo stesso del caso $\alpha = 0$ (moto in campo gravitazionale), altrettanto per le curve di livello (non riportiamo qua i dettagli sulla soluzione per quadrature, che viene lasciata al lettore). Consideriamo il caso $\alpha > 0$. Distinguiamo qua tre ulteriori sottocasi:

- a) CASO $L^4 > 4\alpha$: le radici ρ_{\pm} sono reali, distinte e positive, quindi esistono due punti di equilibrio per il moto radiale. Il grafico di V_{eff} per una particolare scelta di α è in Fig.5. Il grafico delle curve di livello corrispondenti è in Fig.7.
- b) CASO $L^4 = 4\alpha$: $\rho_+ = \rho_- > 0$, quindi esiste un unico punto di equilibrio per il moto radiale.
- c) CASO $L^4 < 4\alpha$: $\rho_{\pm} \notin \mathbb{R}$, quindi non esistono punti di equilibrio per il moto radiale, e si vede che $V'_{eff}(\rho) < 0, \forall \rho > 0$. Il grafico di V_{eff} è in Fig.6.

Nel caso a), il grafico di V_{eff} ha una forma qualitativa leggermente diversa a seconda se $V_{eff}(\rho_-)$ è maggiore o minore di 0. In termini di L^4/α tale condizione è equivalente a L^4/α maggiore o minore di $16/3$: se $L^4 > 16\alpha/3$ allora $V_{eff}(\rho_-) > 0$, se $4\alpha < L^4 < 16\alpha/3$ allora $V_{eff}(\rho_-) < 0$. Il grafico in Fig.5 corrisponde a quest'ultimo caso (lo studio dei casi $L^4 \geq 16\alpha/3$ è lasciato al lettore).

- Se $L^4 \geq 16\alpha/3$ allora i moti periodici non banali per la variabile ρ corrispondono ai dati iniziali con $E < 0$ e $\rho(0) > \rho_-$. Tutti gli altri dati iniziali corrispondono a moti aperti, o illimitati, o che cadono sul centro della forza.
- Se $L^4 < 16\alpha/3$ allora i moti periodici non banali per la variabile ρ corrispondono ai dati iniziali con $V_{eff}(\rho_+) < E < V_{eff}(\rho_-)$ e $\rho(0) > \rho_-$. Tutti gli altri dati iniziali corrispondono a moti aperti, che o sono illimitati, o cadono sul centro della forza (se $E < 0$ i moti diversi da quelli periodici sono limitati e cadono sul centro sia nel passato che nel futuro; se $E \geq 0$ i moti cadono sul centro nel passato e divergono nel futuro, o viceversa).

Nel caso b) tutti i moti con energia diversa da $V_{eff}(\rho_{eq})$, dove $\rho_{eq} = L^2/2$ è punto di flesso di V_{eff} , corrispondono a moti aperti, che o sono illimitati, o cadono sul centro della forza (se $E < 0$ i moti diversi a energia diversa da $V_{eff}(\rho_{eq})$ sono limitati e cadono sul centro sia nel passato che nel futuro; se $E \geq 0$ i moti cadono sul centro nel passato e divergono nel futuro, o viceversa). Se l'energia è uguale a $V_{eff}(\rho_{eq})$, allora oltre al moto banale $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, il moto ammette un moto non banale che nel passato cade sul centro e nel futuro è asintotico a ρ_{eq} , o viceversa.

Nel caso c) tutti i moti sono aperti, che o sono illimitati, o cadono sul centro della forza (se $E < 0$ i moti sono limitati e cadono sul centro sia nel passato che nel futuro; se $E \geq 0$ i moti cadono sul centro nel passato e divergono nel futuro, o viceversa).

I moti periodici non banali del caso a) hanno periodo

$$T_0 = \sqrt{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} \quad (28)$$

dove i punti di inversione ρ_1, ρ_2 sono le due soluzioni dell'equazione $V_{eff} = E$ a destra di ρ_- .

La soluzione per quadrature del moto radiale, per porzioni di traiettoria che si svolgono, ad es., nel semipiano dello spazio delle fasi a $\dot{\rho} > 0$, ha la forma

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}} = t$$

2. Se $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature del moto radiale appena discussa,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t ds \frac{L}{m\rho^2(s)} \quad (29)$$

Se il sistema parte con velocità radiale nulla su un punto di equilibrio ρ_{eq} (che può essere o ρ_- o ρ_+ , nei casi discussi sopra) la soluzione si riduce a un moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2} t \quad (30)$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di velocità angolare $\frac{L}{m\rho_{eq}^2}$.

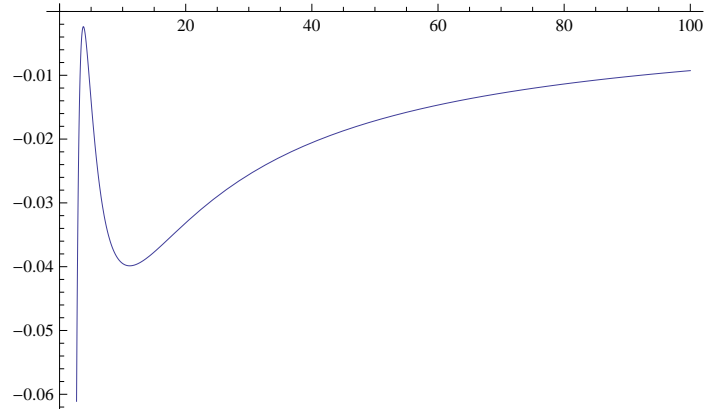


Figure 5: Esercizio 3. Grafico di V_{eff} , con $L^4 > 4\alpha > 0$.

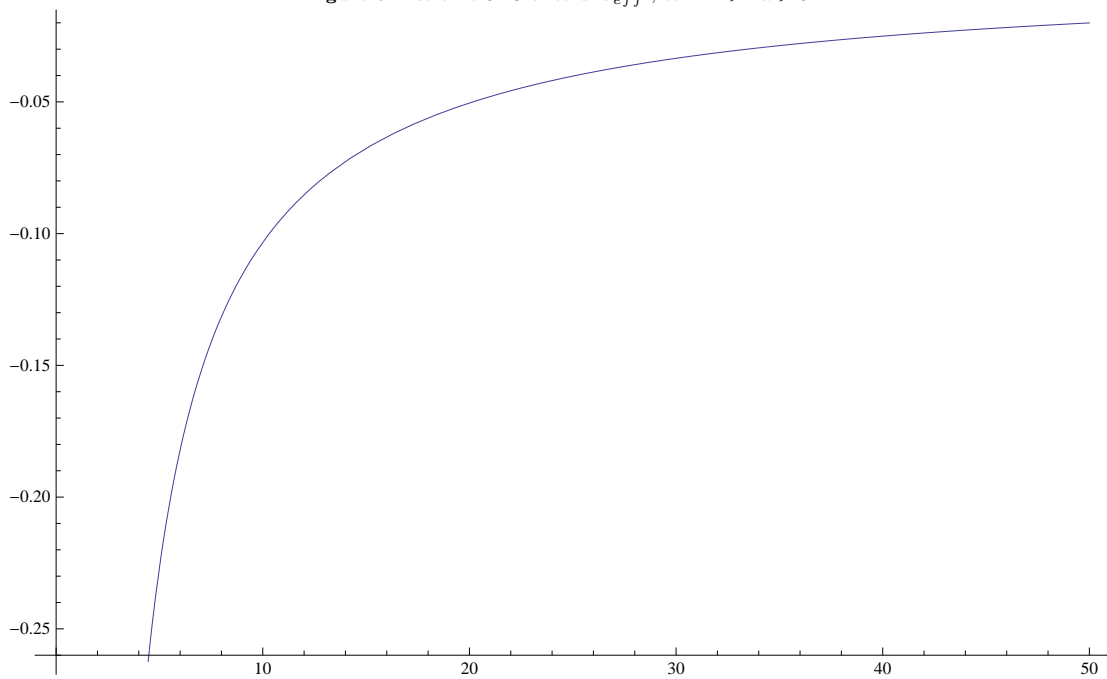


Figure 6: Esercizio 3. Grafico di V_{eff} , con $L^4 < 4\alpha$ e $\alpha > 0$.

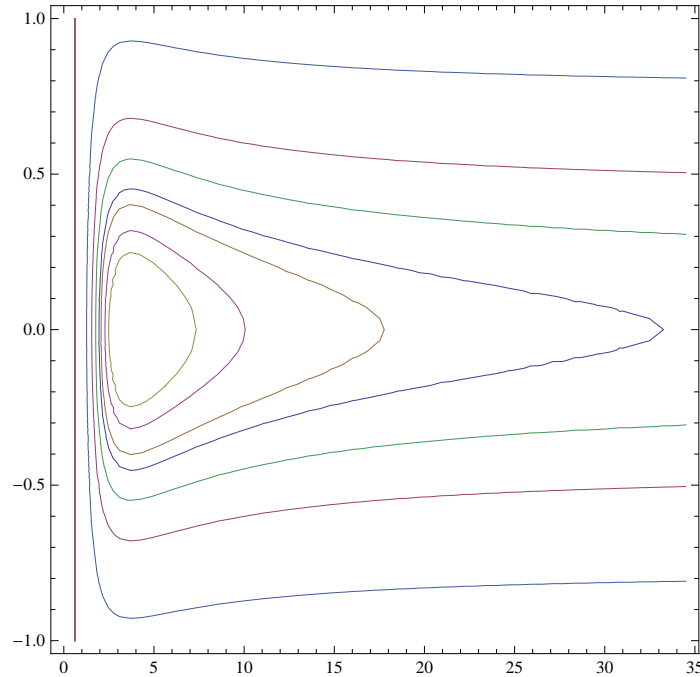


Figure 7: Esercizio 3. Curve di livello, con $L^4 > 4\alpha$ e $\alpha > 0$.

3. Il moto complessivo è periodico o nel caso appena discusso ($\rho \equiv \rho_{eq}$) o nei casi in cui $\rho(t)$ è periodica, e $\omega_1 T_0$ è un multiplo razionale di 2π , come spiegato nel punto 3 dell'esercizio 1.
4. Consideriamo parametri e dati iniziali tali che il moto cada sul centro nel futuro. Il tempo di caduta è

$$t_c = \int_0^{\rho(0)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E + \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{3\rho^3} - \frac{L^2}{2\rho^2})}}. \quad (31)$$

Per ρ piccoli la funzione integranda si comporta come $(\sqrt{3/(2\alpha)})\rho^{3/2}$, che è integrabile nell'origine, quindi il tempo di caduta è finito e la soluzione corrispondente *non* è globale nel tempo.

Esercizio 4 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(\rho) = V_0 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 \right) \quad (32)$$

con $V_0, r_0 > 0$. Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

4. per i moti aperti, si discuta se la soluzione è globale o no.

SOLUZIONE

1. $V_{eff}(\rho) = V_0 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 \right) + \frac{L^2}{2m\rho^2}$ e consideriamo solo il caso $L \neq 0$. Si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff} = \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff} = -\infty \quad (33)$$

e

$$V'_{eff}(\rho) = V_0 \left(-\frac{\rho^3}{r_0^4} + \frac{\rho}{r_0^2} \right) - \frac{L^2/m}{\rho^3} = \frac{V_0 \left(-\frac{\rho^6}{r_0^4} + \frac{\rho^4}{r_0^2} \right) - L^2/m}{\rho^3} \quad (34)$$

Con la sostituzione $\rho^2 = t$, osserviamo che l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ ha soluzione (nelle variabili t) nei punti in cui la funzione $V_0 \left(-\frac{t^3}{r_0^4} + \frac{t^2}{r_0^2} \right)$ interseca la retta orizzontale L^2/m : quindi se L è più piccolo del massimo di $V_0 \left(-\frac{t^3}{r_0^4} + \frac{t^2}{r_0^2} \right)$ (che è uguale a $\frac{4}{27} V_0 r_0^2$, come è facile verificare), allora ci sono due punti in cui $V'_{eff}(\rho) = 0$, mentre se $L > \frac{4}{27} V_0 r_0^2$ l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ non ha soluzioni (e quindi $V_{eff}(\rho)$ è sempre decrescente). I diversi comportamenti qualitativi di V_{eff} sono mostrati in Fig.8 e Fig.9. Le curve di livello per il primo caso sono mostrate in Fig.10.

Il sistema ammette moti periodici del moto radiale nel caso in cui $0 < L < \frac{4}{27} V_0 r_0^2$, l'energia è minore di quella del punto di equilibrio instabile ρ_{inst} e $\rho(0) < \rho_{inst}$. In tal caso il periodo del moto radiale è

$$T_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} \quad (35)$$

dove $\rho_{1,2}$ sono i punti di inversione.

2. La discussione è analoga a quella degli esercizi precedenti.
3. La discussione è analoga a quella degli esercizi precedenti.
4. Consideriamo ora dati iniziali corrispondenti ad un moto aperto con $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = +\infty$. Il tempo per raggiungere l'infinito è

$$T_\infty = \int_{\rho(0)}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2 \left(E + V_0 \left(+\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 \right) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (36)$$

Per ρ grandi la funzione integranda si comporta come $\sqrt{2}(r_0^2/\rho^2)$, che è integrabile all'infinito, quindi $T_\infty < \infty$ e il moto *non* esiste globalmente.

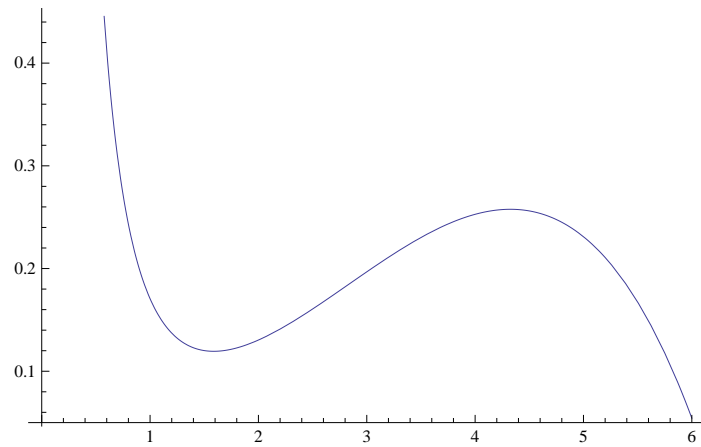


Figure 8: Esercizio 4. Grafico di V_{eff} , con L abbastanza piccolo da conservare il punto di equilibrio stabile.

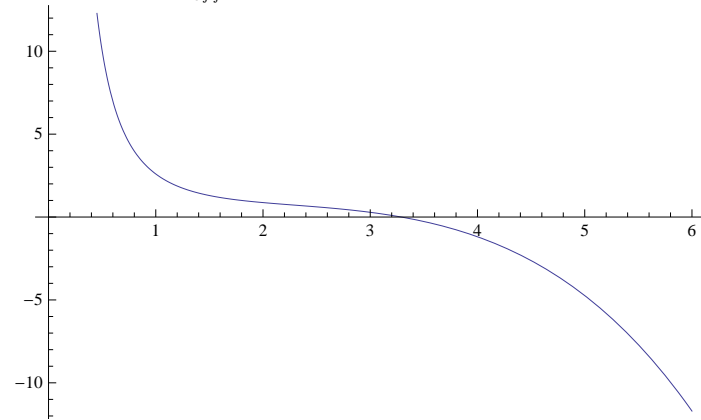


Figure 9: Esercizio 4. Grafico di V_{eff} , con L abbastanza grande da rendere il potenziale monotono decrescente.

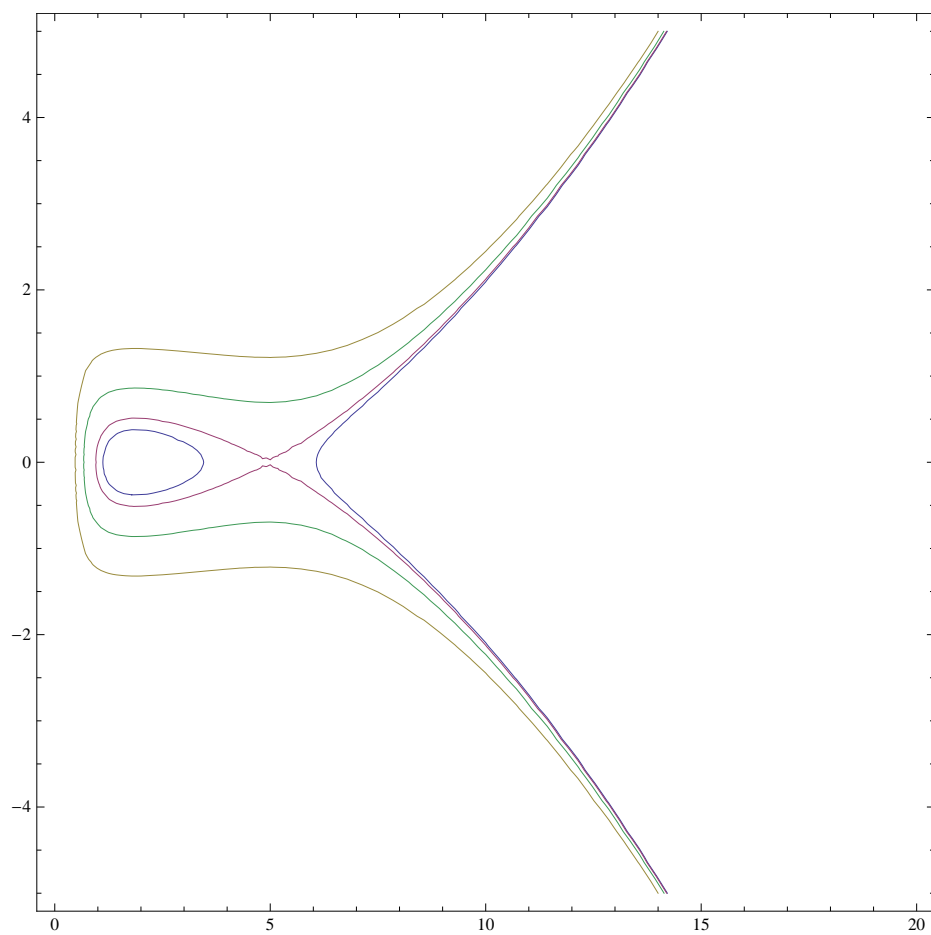


Figure 10: Esercizio 4. Curve di livello nel caso L "piccolo".