6^o tutorato - MA - 1/4/2015 – Soluzione dell'Esercizio 1

Esercizio 1 (**Pendolo sferico**) Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso su una superficie sferica liscia (vincolo ideale) di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$, dove ℓ è una costante positiva.

1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche:
$$\mathbf{x} = \ell \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\phi \\ \sin\alpha\sin\phi \\ 1 - \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema vincolato, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\alpha, \phi, \dot\alpha, \dot\phi)$. Si noti che $\mathcal{L}$ è indipendente da ϕ (in questo caso si dice che ϕ è una variabile *ciclica*).

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e un secondo integrale primo $A = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}$.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza da $\dot\phi$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\alpha, \dot\alpha$ e di A nella forma $E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\alpha^2 + V_{eff}(\alpha)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\alpha)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto della variabile α.

6. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

SOLUZIONE

1.
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \ell\dot\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\phi \\ \cos\alpha\sin\phi \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \ell\dot\phi\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

e quindi, notando che i due vettori colonna a membro di destra sono tra loro ortogonali,
$$|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = \ell^2\left(\dot\alpha^2 + \dot\phi^2\sin^2\alpha\right). \tag{2}$$

L'energia cinetica T e l'energia potenziale V in coordinate sferiche sono
$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\alpha^2 + \dot\phi^2\sin^2\alpha\right), \qquad V = mgz = \ell mg(1-\cos\alpha) \tag{3}$$

da cui
$$\mathcal{L}(\alpha, \phi; \dot\alpha, \dot\phi) = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\alpha^2 + \dot\phi^2\sin^2\alpha\right) - \ell mg(1-\cos\alpha). \tag{4}$$

Si noti che $\mathcal{L}$ non dipende dalla variabile angolare ϕ, *i.e.* ϕ è una **variabile ciclica**.

2. Calcoliamo le derivate della lagrangiana rispetto a tutte le variabili lagrangiane:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= m\ell^2 \dot{\phi}^2 \sin\alpha\cos\alpha - mgl\sin\alpha, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} &= m\ell^2 \dot{\alpha}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= m\ell^2 \dot{\phi}\sin^2\alpha, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0,
\end{aligned} \tag{5}
$$

grazie alle quali le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$
\begin{aligned}
m\ell^2\ddot{\alpha} &= m\ell^2\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha - mgl\sin\alpha, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

Osserviamo che la seconda equazione ci dice che $A := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2\dot{\phi}\sin^2\alpha$ è una costante del moto.

3. L'energia del sistema è

$$
\begin{aligned}
E &= \dot{\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} + \dot{\phi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} = T + V = \\
&= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\alpha\right) + \ell mg(1-\cos\alpha)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si verifica che E è una costante del moto, infatti:

$$
\frac{dE}{dt} = \ddot{\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} + \dot{\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} + \ddot{\phi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \dot{\phi}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \dot{\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} - \dot{\phi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \ddot{\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} - \ddot{\phi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 \tag{8}
$$

La conservazione dell'energia meccanica può essere verificata anche in modo esplicito, infatti

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= m\ell^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + m\ell^2\dot{\phi}\ddot{\phi}\sin^2\alpha + m\ell^2\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\dot{\alpha} + m\ell g\sin\alpha\dot{\alpha} = \\
m\ell^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} &+ m\ell^2\dot{\phi}\ddot{\phi}\sin^2\alpha - m\ell^2\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\dot{\alpha} + m\ell g\sin\alpha\dot{\alpha} + 2m\ell^2\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\dot{\alpha} = \\
\dot{\alpha}(m\ell^2\ddot{\alpha} &- m\ell^2\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha + m\ell g\sin\alpha) + \dot{\phi}(m\ell^2\ddot{\phi}\sin^2\alpha + 2m\ell^2\dot{\phi}\sin\alpha\cos\alpha\dot{\alpha}) = 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

Dalla conservazione di A, otteniamo quanto segue: (i) se $A = 0$, allora $\dot{\phi}\sin\alpha \equiv 0$, che implica che l'equazione del moto per α è $\ddot{\alpha} = -(g/l)\sin\alpha$, i.e., il moto si riduce a quello di un pendolo semplice bidimensionale, la cui soluzione non sarà ripetuta qui. (ii) Se $A \neq 0$, allora $\dot{\phi} = \frac{A}{m\ell^2\sin^2\alpha}$. Se sostituiamo questo valore nell'equazione dell'energia totale otteniamo:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\alpha}^2 + \left(\frac{A}{m\ell^2\sin^2\alpha}\right)^2\sin^2\alpha\right) + \ell mg(1-\cos\alpha) = \\
&= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{A^2}{m\ell^2\sin^2\alpha} + m\ell g(1-\cos\alpha)\right) =: \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + V_{eff}(\alpha),
\end{aligned} \tag{10}
$$

ovvero $V_{eff}(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{A^2}{m\ell^2\sin^2\alpha} + m\ell g(1-\cos\alpha)$.

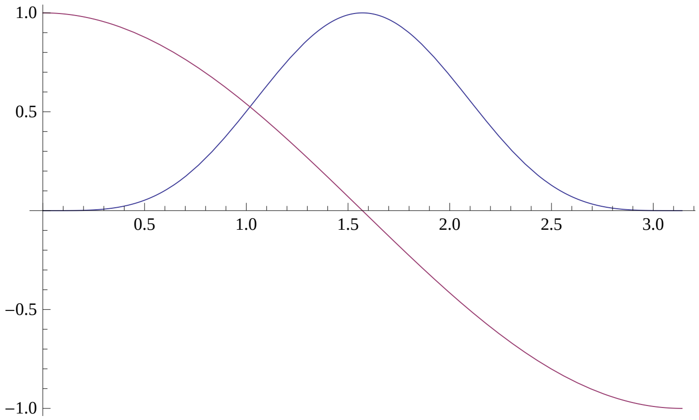

Figure 1: Grafici, nell'intervallo $[0, \pi]$, di $(A^2/(m\ell^2)) \cos\alpha$ e di $mg\ell \sin^4\alpha$. Come evidente, le due curve si intersecano esattamente in un punto.

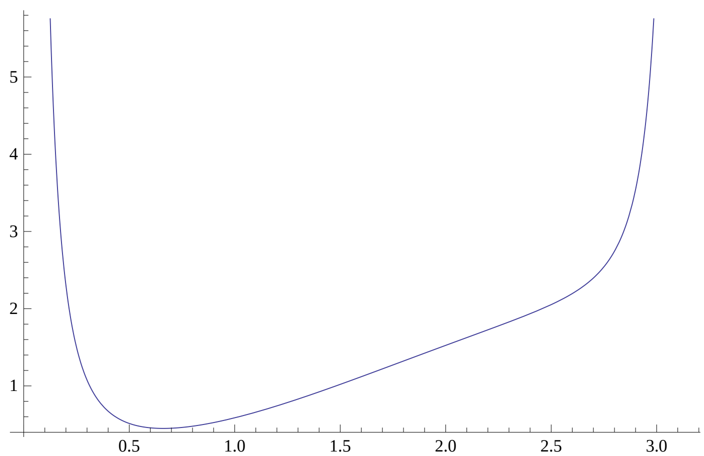

Figure 2: Grafico di V_{eff} in $(0, \pi)$

4. Per studiare il moto con $A \neq 0$, iniziamo a studiare il grafico di $V_{eff}(\alpha)$, per $\alpha \in (0, \pi)$. Osserviamo che $\lim_{\alpha\to 0,\pi} V_{eff}(\alpha) = +\infty$, e i punti di equilibrio sono quelli che soddisfano l'equazione:

$$\frac{d}{d\alpha} V_{eff}(\alpha) = \frac{m\ell g \sin^4\alpha - \frac{A^2}{m\ell^2}\cos\alpha}{\sin^3\alpha} = 0. \tag{11}$$

Per capire quante radici ha l'ultima equazione, possiamo ad esempio usare un metodo grafico (vedi, e.g., figura (1)), che ci permette di concludere che il numeratore $m\ell g \sin^4\alpha - \frac{A^2}{m\ell^2}\cos\alpha$ ammette una e una sola radice in $(0, \pi)$, che chiamiamo α^*. La forma di V_{eff} è rappresentata in figura (2) Quindi:

- per $E < V_{eff}(\alpha^*)$ non esistono moti,
- per $E = V_{eff}(\alpha^*)$ si ha la soluzione di equilibrio $\alpha = \alpha^*$. Inoltre, sappiamo dalle equazioni di Eulero-Lagrange che $\dot\phi = const$, quindi il moto complessivo è circolare uniforme, e si svolge sul parallelo identificato dall'angolo α^*.

- Per $E > V_{eff}(\alpha^*)$, il moto della variabile α è periodico tra i punti $\alpha_1^{(E)}$ e $\alpha_2^{(E)}$ soluzioni dell'equazione $V_{eff}(\alpha) = E$. Il periodo è

$$T_1 = 2 \int_{\alpha_1^{(E)}}^{\alpha_2^{(E)}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}(E - V_{eff}(\alpha))}} \tag{12}$$

Il moto complessivo è periodico o quasi-periodico a seconda del valore, razionale o irrazionale, del rapporto tra T_1 e il secondo periodo T_2, definito dalla soluzione dell'equazione per ϕ, come discusso al punto successivo.

5. Se $\alpha(t)$ è la soluzione per quadrature del moto della variabile α, la soluzione del moto della variabile $\phi(t)$ è

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{A}{m\ell^2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sin^2 \alpha(\tau)},$$

che può scriversi come sovrapposizione di due moti periodici:

$$\phi(t) = g(t) + f(t),$$

dove

$$g(t) = \phi_0 + \omega_2 t, \quad \text{con} \quad \omega_2 = \frac{1}{T_1} \frac{A}{m\ell^2} \int_0^{T_1} \frac{dt}{\sin^2 \alpha(t)} = \frac{2}{T_1} \frac{A}{m\ell^2} \int_{\alpha_1^{(E)}}^{\alpha_2^{(E)}} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{\frac{2}{m\ell^2}(E - V_{eff}(\alpha))}},$$

mentre

$$f(t) = \frac{A}{m\ell^2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sin^2 \alpha(\tau)} - \omega_2 t.$$

Nelle equazioni precedenti, ricordando che ϕ è una variabile angolare (quindi definita a meno di multipli interi di 2π), $g(t)$ corrisponde a un moto circolare uniforme di periodo $T_2 = 2\pi/\omega_2$, mentre $f(t)$ è periodico di periodo T_1. Il moto complessivo è periodico se e solo se $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$, che corrisponde alla condizione

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\pi} \frac{A}{m\ell^2} \int_{\alpha_1^{(E)}}^{\alpha_2^{(E)}} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{\frac{2}{m\ell^2}(E - V_{eff}(\alpha))}} \in \mathbb{Q}.$$

Se tale combinazione è irrazionale il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale del piano delle fasi $(\alpha, \phi, \dot{\alpha}, \dot{\phi})$.