7^o tutorato - MA - Prova Pre-Esonero - 8/4/2015

Esercizio 1 Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi nel piano verticale xy (con x l'asse orizzontale e y l'asse verticale orientato verso l'alto), su una guida liscia rettilinea di equazione $y = x - \ell$, con ℓ una costante positiva. Oltre alla reazione vincolare (supposta ideale), la massa m è soggetta alla *forza peso* e a una *forza di richiamo* dovuta a una molla con un estremo nell'origine e lunghezza di riposo 2ℓ; si supponga che tale forza di richiamo sia conservativa, con energia potenziale

$$U(\mathbf{x}) = A(|\mathbf{x}|^2 - 4\ell^2)^2, \qquad \text{con} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dove $A = mg/(12\ell^3)$, e g è l'accelerazione di gravità.

1. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema vincolato, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(x, \dot{x})$.
2. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette una grandezza conservata, da identificarsi con l'energia meccanica E.
3. Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ al variare di E e si discuta la natura qualitativa del moto.
4. Si risolva il moto per quadrature. Si discutano le condizioni per cui il moto è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

SOLUZIONI

1. Sfruttando le equazioni del vincolo in forma parametrica il vettore posizione è

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - \ell \end{pmatrix}$$

da cui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Quindi, sul vincolo,

$$|\boldsymbol{x}|^2 = x^2 + (x - \ell)^2 = 2x^2 + \ell^2 - 2x\ell, \qquad |\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = 2\dot{x}^2 \tag{1}$$

Quindi il termine di energia cinetica T e di energia potenziale $V(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x}) + U_g(\boldsymbol{x})$ (dove abbiamo indicato con U_g il termine di energia potenziale gravitazionale) possono essere scritti come

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = m\dot{x}^2, \\ V(x) = mgy + A(|\mathbf{x}|^2 - 4\ell^2)^2 &= mg(x - \ell) + A(2x^2 - 2x\ell - 3\ell^2)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Possiamo quindi scrivere la Lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = T - V = m\dot{x}^2 - mg(x - \ell) - A(2x^2 - 2x\ell - 3\ell^2)^2$$

.

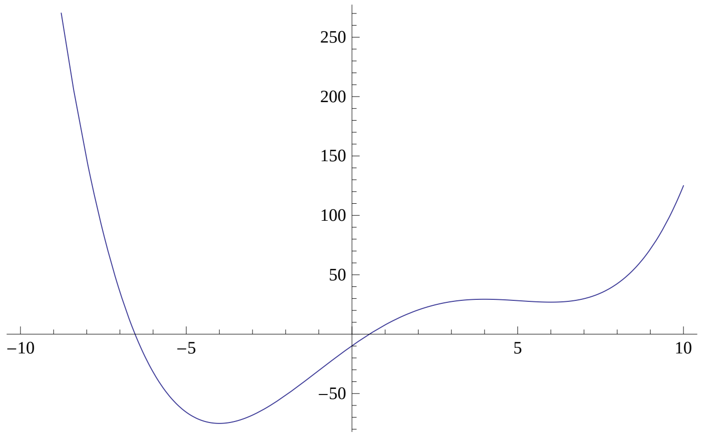

Figure 1: Grafico del potenziale per valori $m = 1kg$, $\ell = 4m$, $g = 9.8m/s^2$.

2. Per ricavare le equazioni di Eulero- Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -mg - 2A(2x^2 - 2x\ell - 3\ell^2)(4x - 2\ell), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= 2m\dot{x}, \end{aligned} \tag{3}$$

da cui otteniamo l'equazione di Eulero-Lagrange

$$2m\ddot{x} = -mg - 2A(2x^2 - 2x\ell - 3\ell^2)(4x - 2\ell) \tag{4}$$

Definendo la quantità $E = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = T + V$, si verifica banalmente grazie alle Eulero-Lagrange che E è una costante del moto, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \ddot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right) = 0 \tag{5}$$

3. Studiamo il ptenziale $V(x) = U_g(x) + U(x)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \infty.$$

Inoltre, esplicitando $A = mg/(12\ell^3)$,

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} = mg + 2\frac{mg}{12\ell^3}(2x^2 - 2x\ell - 3\ell^2)(4x - 2\ell) &= 0 \\ &\Longleftrightarrow \\ 2x^3 - 3\ell x^2 - 2\ell^2 x + 3\ell^3 &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

che ha tre radici reali e distinte in

$$x_- = -\ell, \qquad x_+ = \ell, \qquad x_0 = \frac{3}{2}\ell \tag{7}$$

Il potenziale è rapprensentato in figura (1). Le curve di livello sono disegnate in figura 2 Quindi tutti i moti sono moti chiusi, in particolare

- Per $E < V(-\ell)$ non sono permessi moti.

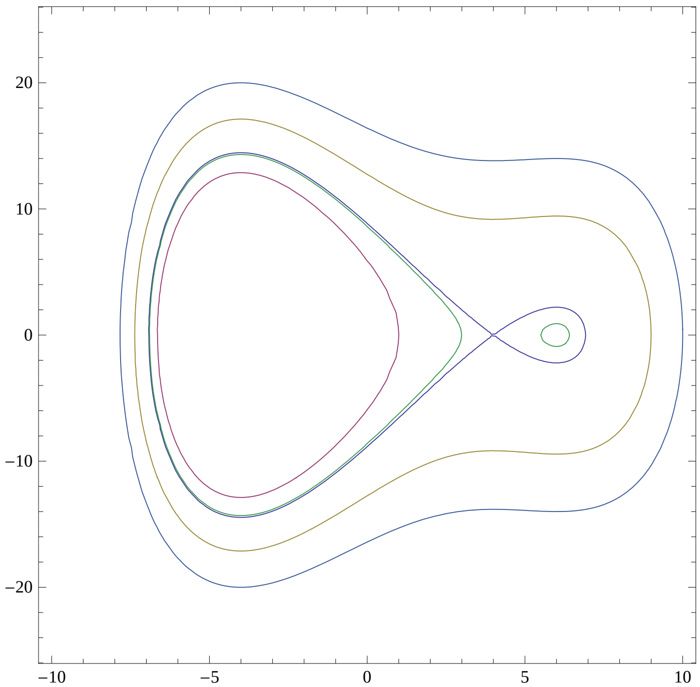

Figure 2: Curve di livello per valori $m = 1kg$, $\ell = 4m$, $g = 9.8m/s^2$.

- Per $E = V(\ell)$ il moto si svolge sulla separatrice.
- Se il sistema parte con velocità nulla su uno dei tre punti di equilibrio, il moto è costante.
- Per $V(-\ell) < E < V(\frac{3}{2}\ell)$ gli unici moti permessi sono quelli periodici intorno al minimo assoluto (corrispondente a $x = -\ell$).
- Per $V(\frac{3}{2}\ell) \leq E < V(\ell)$ i moti sono periodici, rispettivamente intorno al minimo in $-\ell$ oppure intorno al minimo in $\frac{3}{2}\ell$ in base alla scelta delle condizioni iniziali (*i.e.* a destra o sinistra del massimo locale).
- Per $E > V(\ell)$, tutti i moti sono periodici intorno alla doppia buca di potenziale.

4. Per trovare il periodo dei moti periodici: fissiamo E, chiamiamo $x_1^{(E)}$ e $x_2^{(E)}$ le due radici dell'equazione $V(x) = E$ (nei casi in cui le radici siano più di due, $x_1^{(E)}$ e $x_2^{(E)}$ sono da identificarsi con quelle tra cui si svolge il moto). Quindi, essendo $\dot{x}^2 = \frac{1}{m}(E - V(x))$

$$T = 2\int_{x_1^{(E)}}^{x_2^{(E)}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m}(E - V(x))}}. \tag{8}$$

Esercizio 2 Una massa puntiforme m di coordinata $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si muove sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)$, con

$$V(\rho) = V_0\Big[\frac{\rho}{r_0} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\rho}{r_0}\Big)^4\Big],$$

e V_0, r_0 due parametri positivi.

1. Si identifichino le quattro grandezze conservate del sistema. Le si scrivano in termini delle coordinate polari (ρ, θ) sul piano su cui si svolge il moto.
2. Dopo aver identificato il potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$, se ne disegni il grafico, al variare del modulo del momento angolare $L > 0$ (si supponga che il momento angolare sia diverso da zero).
3. Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E e del modulo del momento angolare $L > 0$.
4. Si discuta la natura qualitativa del moto radiale e di quello complessivo.
5. Si esibisca una scelta di E, L e dei dati iniziali per cui il moto *complessivo* è periodico, e se ne calcoli il periodo.

SOLUZIONE

1. Come noto, le quattro grandezze conservate sono l'energia meccanica totale E e le tre componenti del momento angolare $\boldsymbol{L}$. Sia (x, y) il piano su cui si svolge il moto. Allora
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$
e
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$
da cui $|\boldsymbol{x}| = \rho$, e $|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$. Il vettore momento angolare è
$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\rho^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{11}$$
Quindi $E = T + V = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 + V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + V(\rho)$.
2. Definendo $|\boldsymbol{L}| = L$ e sostituendo il valore di $\dot{\theta}$ all'interno dell'espressione di E, possiamo definire potenziale efficace come
$$V_{eff}(\rho) = V_0\left[\frac{\rho}{r_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^4\right] + \frac{L^2}{2m\rho^2}. \tag{12}$$
e studiare il moto radiale come moto unidimensionale.
Notiamo che $\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = \infty$, $\lim_{\rho\to\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$. Per studiare i punti di equilibrio
$$\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho} = \frac{V_0}{r_0} - \frac{V_0}{r_0^4}\rho^3 - \frac{L^2}{m\rho^3} = 0 \tag{13}$$
ovvero
$$\frac{mV_0 r_0^3\rho^3 - mV_0\rho^6 - r_0^4 L^2}{m r_0^4 \rho^3} = 0.$$
Il denominatore è sempre positivo per $\rho > 0$, quindi dobbiamo studiare solo il numeratore. Con la sostituzione $\rho^3 =: t$ ci riconduciamo all'equazione di secondo grado
$$t^2 - r_0^3 t + \frac{r_0^4 L^2}{mV_0} = 0 \tag{14}$$
che ha soluzioni
$$t_\pm = \frac{r_0^3 \pm \sqrt{r_0^6 - 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}}}{2} \tag{15}$$
quindi

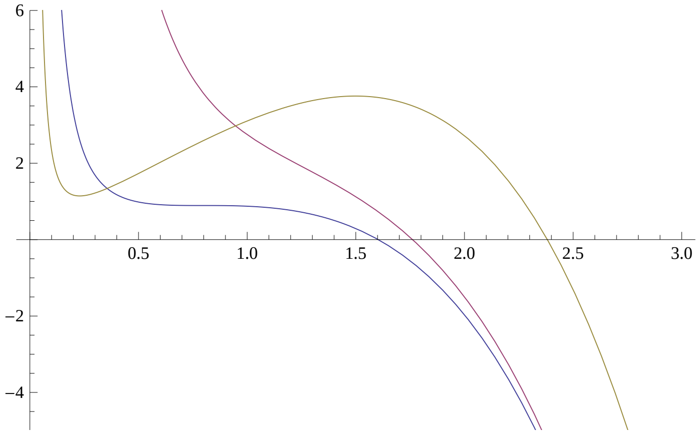

Figure 3: Grafico del potenziale: in viola il caso $r_0^6 < 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$, in blu il caso $r_0^6 = 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$, in ocra il caso $r_0^6 > 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$.

- Se $r_0^6 < 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$ non esistono radici reali.
- Se $r_0^6 = 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$, le radici coincidono $t_+ = t_- = \frac{r_0^3}{2}$.

  Quindi tornando alla variabile ρ, $\rho_0 = \sqrt[3]{\frac{r_0^3}{2}} = \frac{r_0}{\sqrt[3]{2}}$.
- Se $r_0^6 > 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$ le radici sono reali e distinte.

  Quindi tornando alla variabile ρ, le radici sono $\rho_\pm = \sqrt[3]{\frac{r_0^3 \pm \sqrt{r_0^6 - 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}}}{2}}$, che sono entrambe positive (e quindi entrambe fisicamente accettabili).

Quindi il grafico del potenziale, al variare di $L > 0$ è rappresentato in figura 3

3. Quindi lo studio qualitativo del moto radiale:

- CASO $r_0^6 < 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$: tutti i moti sono aperti, e il sistema tende asintoticamente all'infinito sia nel passato che nel futuro, come si vede da figura 4.
- CASO $r_0^6 = 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$: tutti i moti sono aperti, e il sistema tende asintoticamente all'infinito sia nel passato che nel futuro, eccetto per il moto che si svolge sulla separatrice, ovvero quello con energia iniziale $E = V_{eff}(\rho_0)$, che tende a infinito solo nel passato o solo nel futuro (se tende a infinito nel futuro, nel passato tende al punto di equilibrio instabile, e viceversa). Vedi figura 5.
- CASO $r_0^6 > 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$:
  - Se il sistema parte da fermo in uno dei due punti di equilibrio, i moti sono costanti.
  - Per $E > V_{eff}(\rho_+)$ tutti i moti sono aperti e asintoticamente vanno all'infinito.
  - Per $E < V_{eff}(\rho_-)$ sono permessi solo i moti aperti (condizioni iniziali alla destra del massimo locale).
  - Per $E = V_{eff}(\rho_+)$ i moti si svolgono sulla separatrice, e sono limitati o aperti, a seconda se il valore iniziale di ρ è a sinistra o destra di ρ_+.
  - Per $V_{eff}(\rho_-) \leq E < V_{eff}(\rho_+)$ i moti sono periodici se le condizioni iniziali sono tali che $\rho(0) < \rho_+$. Se $\rho(0) > \rho_+$ sono moti aperti.

  Le curve di livello sono disegnate in figura 6.

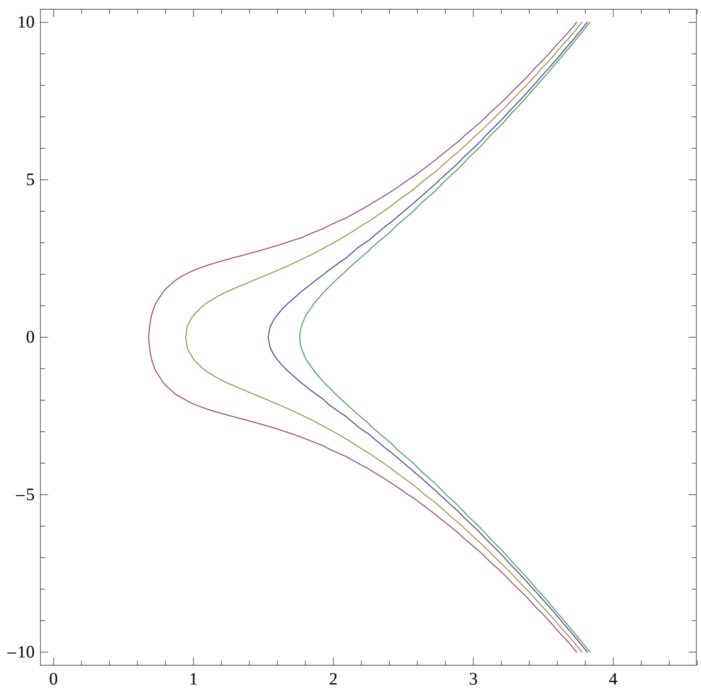

Figure 4: Grafico delle curve di livello nel caso $r_0^6 < 4\frac{r_0^4 L^2}{m V_0}$.

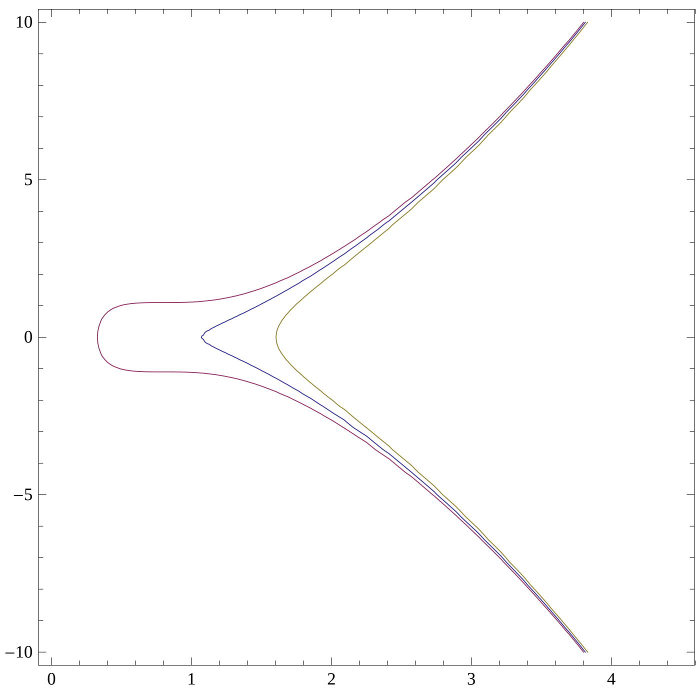

Figure 5: Grafico delle curve di livello nel caso $r_0^6 = 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$.

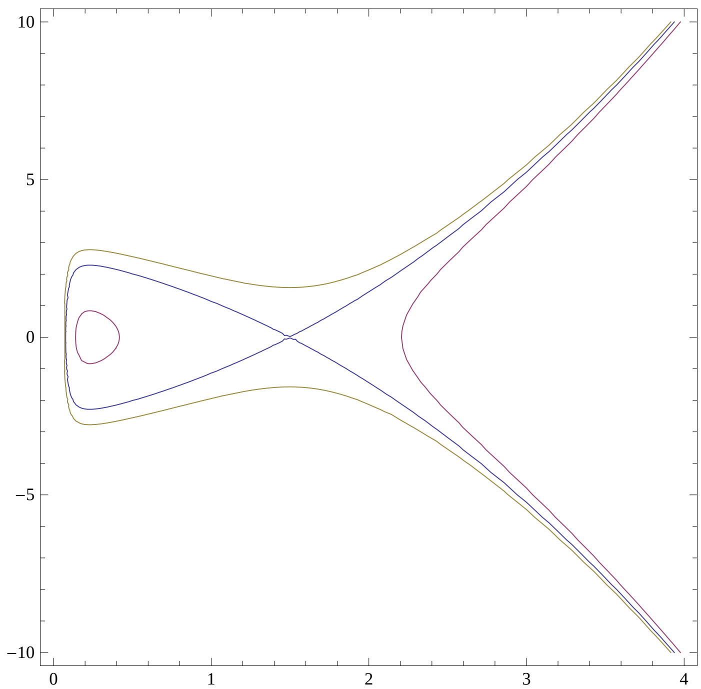

Figure 6: Grafico delle curve di livello nel caso $r_0^6 > 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$.

4. Lo studio qualitativo del moto radiale è stato fatto al punto precedente. Per il moto angolare, sappiamo che
$$\dot\theta(t) = \frac{L}{m\rho^2(t)},$$
quindi
$$\theta(t_0 + t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t+t_0} ds \frac{L}{m\rho^2(s)}$$
Essendo
$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\dot\theta}{\dot\rho} = \frac{L}{m\rho^2(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)}} \tag{16}$$
possiamo calcolare la variazione dell'angolo θ in un qualsiasi intervallo temporale:
$$\Delta\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)}} \tag{17}$$
Condizione necessaria affinchè il moto complessivo sia periodico è che il moto radiale sia periodico (vedi punti precedenti). In tal caso, siano $\rho_1^{(E)}$ ed $\rho_2^{(E)}$ i punti di inversione del moto radiale e T_ρ il periodo del moto radiale. L'incremento della variabile angolare ϕ durante un periodo T_ρ del moto radiale è
$$\Delta\theta(T_\rho) = 2\int_{\rho_1^{(E)}}^{\rho_2^{(E)}} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)}}$$
In tali condizioni, il moto *complessivo* è periodico se e solo se tale incremento è multiplo razionale di 2π, i.e., se $\Delta\theta(T_\rho) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

5. Un caso in cui il moto *complessivo* è periodico si verifica ad esempio quando $\rho(t) \equiv cost$. Ad esempio, se ci mettiamo nel caso $r_0^6 > 4\frac{r_0^4 L^2}{mV_0}$, con dati iniziali $\rho(0) = \rho_-$ e $\dot\rho(0) = 0$, abbiamo $\rho(t) \equiv \rho_-$, e
$$\dot\theta(t) = \frac{L}{m\rho_-^2} =: \omega_\theta,$$
che vuol dire che il moto complessivo è circolare uniforme, di periodo $T = 2\pi/\omega_\theta$.