8^o tutorato - MA - 15/4/2015 - Soluzioni

Esercizio 1 - Soluzioni Vedere le soluzioni del quarto esercizio dell'esame scritto del corso di FM210 2013-14 (esame del 20/01/2014), disponibile al link
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/primo_scritto-sol.pdf`

Esercizio 2 (metodo di Routh) - SOLUZIONE La lagrangiana del sistema dell'esercizio 1 è

$$\mathcal{L}(\rho,\phi;\dot\rho,\dot\phi) = K - U = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta_0\dot\phi^2) - mg\rho\cos\theta_0 \tag{1}$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{cases} m\ddot\rho = m\rho\sin^2\theta_0\dot\phi^2 - mg\cos\theta_0 \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\sin^2\theta_0\dot\phi) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

da cui definiamo la quantità conservata $A := m\rho^2\sin^2\theta_0\dot\phi$.

1. Allora

$$\mathcal{L}_0(\rho,\dot\rho) := \mathcal{L}(\rho,\dot\rho,\dot\phi)\Big|_{\dot\phi = A/(m\rho^2\sin^2\theta_0)} = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2}{m\rho^2\sin^2\theta_0} - mg\rho\cos\theta_0 \tag{3}$$

   Quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\rho} = -\frac{A^2}{m\sin^2\theta_0\rho^3} - mg\cos\theta_0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot\rho} = m\dot\rho \end{cases} \tag{4}$$

   da cui l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$m\ddot\rho = -\frac{A^2}{m\sin^2\theta_0\rho^3} - mg\cos\theta_0 = -m\rho\sin^2\theta_0\dot\phi^2 - mg\cos\theta_0, \tag{5}$$

   che è diversa da (2).

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R(\rho,\dot\rho) &:= \Big[\mathcal{L}(\rho,\dot\rho,\dot\phi) - \dot\phi A(\rho,\dot\phi)\Big]\Big|_{\dot\phi = A/(m\rho^2\sin^2\theta_0)} = \\ &= \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2}{m\rho^2\sin^2\theta_0} - mg\rho\cos\theta_0 - \frac{A^2}{m\rho^2\sin^2\theta_0}, \end{aligned} \tag{6}$$

   da cui

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}_R}{\partial\rho} = -\frac{A^2}{m\sin^2\theta_0\rho^3} - mg\cos\theta_0 + 2\frac{A^2}{m\sin^2\theta_0\rho^3}, \\ \frac{\partial\mathcal{L}_R}{\partial\dot\rho} = m\dot\rho \end{cases} \tag{7}$$

   cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}_R}{\partial\rho} = m\sin^2\theta_0\rho\dot\phi^2 - mg\cos\theta_0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}_R}{\partial\dot\rho} = m\dot\rho, \end{cases} \tag{8}$$

   da cui l'equazione di Eulero-Lagrange è uguale alla prima delle (2).

3. La dimostrazione generale del metodo di Routh è stata discussa a lezione ed è descritta in dettaglio su qualsiasi testo di meccanica razionale, si consultino ad esempio le dispense del Prof. Gentile (cap.12.54), disponibili al link: `http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2014-2015/FM410/testo.html`