9^o tutorato - MA - 24/4/2015 - Soluzioni

Esercizio 1 - Pendolo di Foucault - SOLUZIONE

1.

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \ell\dot{\alpha}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\phi\\ \cos\alpha\sin\phi\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + \ell\dot{\phi}\sin\alpha\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{Q}} = \ell\ddot{\alpha}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\phi\\ \cos\alpha\sin\phi\\ \sin\alpha\end{pmatrix} + \ell\dot{\alpha}^2\begin{pmatrix}-\sin\alpha\cos\phi\\ -\sin\alpha\sin\phi\\ \cos\alpha\end{pmatrix} + \ell\dot{\alpha}\dot{\phi}\begin{pmatrix}-\cos\alpha\sin\phi\\ \cos\alpha\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} +\\ + \left(\ell\ddot{\phi}\sin\alpha + \ell\dot{\phi}\dot{\alpha}\cos\alpha\right)\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} - \ell\dot{\phi}^2\sin\alpha\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$

2. I versori che generano il piano tangente alla superficie sferica nel punto identificato dal parametro ℓ e dagli angoli α e ϕ sono

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\phi\\ \cos\alpha\sin\phi\\ \sin\alpha\end{pmatrix} \tag{2}$$

Ricordando che

$$\boldsymbol{g}_0 = -\begin{pmatrix}0\\ 0\\ g_0\end{pmatrix},$$

dobbiamo calcolare $\ddot{\boldsymbol{Q}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha,\phi}$ e $\boldsymbol{g}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\alpha,\phi}$. Si trova che

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{Q}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= \ell\ddot{\phi}\sin\alpha + 2\ell\dot{\phi}\dot{\alpha}\cos\alpha,\\ \ddot{\boldsymbol{Q}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha &= \ell\ddot{\alpha} - \ell\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\\ \boldsymbol{g}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= 0\\ \boldsymbol{g}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha &= -mg_0\sin\alpha\end{aligned} \tag{3}$$

da cui le equazioni del moto nelle direzioni $\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$ sono rispettivamente

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}\sin\alpha + 2\dot{\phi}\dot{\alpha}\cos\alpha &= 0\\ \ell\ddot{\alpha} - \ell\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha &= -mg_0\sin\alpha\end{aligned} \tag{4}$$

che sono le equazioni di Eulero- Lagrange del pendolo sferico, come aspettato.

3. Come trovato a lezione, l'equazione del moto, tenendo conto della rotazione terrestre, è

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{R}_0) - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\boldsymbol{Q}}. \tag{5}$$

dove nel secondo addendo del termine di destra abbiamo usato $|\mathbf{Q}| \ll |\mathbf{R_0}|$. Ridefinendo quindi $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R_0})$, l'equazione del moto è

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\boldsymbol{Q}} \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{F}_c = -m2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\boldsymbol{Q}}$ è la forza di Coriolis.

4. Dobbiamo calcolare esplicitamente $\boldsymbol{F}_c$ e proiettarla lungo le direzioni $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$, tenendo conto del fatto che $\boldsymbol{\Omega} = \omega \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ dove, se λ è la latitudine, $\theta = \pi/2 - \lambda$. Otteniamo

$$-m2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{2m}\ell\omega \begin{pmatrix} -(\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\phi + \dot{\phi}\sin\alpha\cos\phi)\cos\theta \\ \dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta + (\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\phi - \dot{\phi}\sin\alpha\sin\phi)\cos\theta \\ -(\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\phi + \dot{\phi}\sin\alpha\cos\phi)\sin\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

quindi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_c \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= -2m\omega\ell\left(\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta + \alpha\sin\alpha\sin\dot{\phi}\sin\theta\right) \\ \boldsymbol{F}_c \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha &= -2\omega m\ell\left(-\dot{\phi}\cos\alpha\sin\alpha\cos\theta - \dot{\phi}\sin^2\alpha\cos\phi\sin\theta\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Usando l'approssimazione $\alpha \ll 1$ e $\dot{\alpha} \ll 1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_c \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= -2m\omega\ell\dot{\alpha}\cos\theta, \\ \boldsymbol{F}_c \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha &= 2\omega m\ell\dot{\phi}\alpha\cos\theta. \end{aligned} \tag{9}$$

Sommando i termini della forza di Coriolis alle equazioni di Eulero-Lagrange del pendolo sferico, otteniamo le equazioni di Eulero- Lagrange del pendolo di Foucault:

$$\begin{cases} \ell(\ddot{\alpha} - \alpha\dot{\phi}^2) = -g\alpha + 2\omega\cos\theta\ell\alpha\dot{\phi}, \\ \ell(\alpha\ddot{\phi} + 2\dot{\alpha}\dot{\phi}) = -2\omega\cos\theta\ell\dot{\alpha}. \end{cases} \tag{10}$$

5. Introduciamo la variabile complessa $z = \alpha e^{i\phi}$. Quindi

$$\begin{cases} \dot{z} = e^{i\phi}(\dot{\alpha} + i\dot{\phi}\dot{\alpha}), \\ \ddot{z} = e^{i\phi}\left((\ddot{\alpha} - \alpha\dot{\phi}^2) + i(\alpha\ddot{\phi} + 2\dot{\alpha}\dot{\phi})\right). \end{cases} \tag{11}$$

Definendo $\omega_0^2 = g/\ell$, allora grazie alle equazioni di Eulero- Lagrange riconosciamo che

$$\ddot{z} + 2i\omega\cos\theta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0. \tag{12}$$

Se prendiamo una condizione iniziale tale che il sistema parta da fermo (velocità nulla), in posizione $\phi(0) = 0$ e $\alpha(0) = \delta \ll 1$, allora dobbiamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{z} + 2i\omega\cos\theta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \\ z(0) = \delta, \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 2i\omega\cos\theta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{14}$$

le cui radici sono

$$\lambda_\pm = -i\omega\cos\theta \pm \sqrt{-\omega^2\cos^2\theta - \omega_0^2} =: -i\omega\cos\theta \pm i\bar{\omega}. \tag{15}$$

Osservazione: $\omega_0 \simeq 3rad/s$, $\omega\cos\theta \simeq 4.9\cdot 10^{-5}rad/s$, *quindi* $\bar{\omega} \simeq \omega_0$. Quindi

$$\begin{aligned} z(t) = e^{-i\omega\cos\theta t}\left(Ae^{i\bar{\omega}t} + Be^{-i\bar{\omega}t}\right) &\text{ con } A, B \in \mathbb{C}, \\ z(0) = A + B = \delta \Rightarrow B = \delta - A&, \\ \dot{z}(0) = A(i\bar{\omega} - i\omega\cos\theta) - B(i\bar{\omega} + i\omega\cos\theta) = 0 &\Rightarrow \\ 2A\bar{\omega} - \delta(\bar{\omega} + \omega\cos\theta) = 0& \end{aligned} \tag{16}$$

da cui otteniamo $A = \frac{\delta}{2}\frac{\bar\omega+\omega\cos\theta}{\bar\omega} \sim \delta/2 \Rightarrow \delta - A = \frac{\delta}{2}(1-\omega\cos\theta/\bar\omega)$, da cui

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-i(\omega\cos\theta)t}\left(\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{\omega\cos\theta}{\bar\omega}\right)e^{i\bar\omega t}+\frac{\delta}{2}\left(1-\frac{\omega\cos\theta}{\bar\omega}\right)e^{-i\bar\omega t}\right)= \\ &= \delta e^{-i(\omega\cos\theta)t}\left(\cos\bar\omega t + i\frac{\omega\cos\theta}{\bar\omega}\sin\bar\omega t\right) \simeq \delta\cos\bar\omega t e^{-i(\omega\cos\theta)t}. \end{aligned} \tag{17}$$

Il pendolo oscilla (*angolo* α) con frequenza $\bar\omega$. Il piano di oscillazione precede ruotando (*variazione dell'angolo* ϕ) con periodo $\frac{2\pi}{\omega\cos\theta}$ (ovvero senso orario nell'emisfero boreale in cui $\theta \in [0,\pi/2)$, e in senso antiorario nell'emisfero australe, in cui $\theta \in (\pi/2,\pi]$). All'equatore ($\theta = \pi/2$) il suo periodo è ∞, ovvero il piano non ruota.

Esercizio 2 - SOLUZIONE Vedere le dispense del Prof. Gentile, cap.8, esempio 34.12: le dispense sono disponibili online al seguente link: `http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2014-2015/FM410/testo.html`

Esercizio 3 - SOLUZIONE Vedere la soluzione dell'esercizio 3 dello scritto del 6-9-2013 del corso di FM210 2012-13, disponibile online al seguente link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2012/scritto-s_6-9-13.pdf`