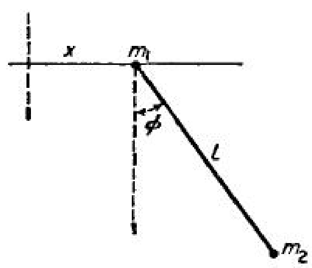
MA - Soluzioni del secondo scritto (10-7-2015)

1. Un pendolo è costituito da un'asticella di lunghezza ℓ e massa trascurabile e da due masse puntiformi m_1 ed m_2 ai suoi estremi. Il pendolo è libero di oscillare in un piano verticale per effetto della forza peso. In aggiunta, la massa m_1 può muoversi liberamente su una guida orizzontale che si trova nello stesso piano di oscillazione del pendolo.



   (a) Si scriva la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (x, ϕ) descritte in figura e delle loro derivate.

   (b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

   (c) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica, e si identifichi il momento conservato corrispondente (e si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{x}$ in termini di $A, \phi, \dot{\phi}$.

   (d) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{x}$ in termini di $A, \phi, \dot{\phi}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(\phi, \dot{\phi})$.

   (e) Si disegni il grafico delle curve di livello nel piano $(\phi, \dot{\phi})$ corrispondenti al moto della variabile angolare e se ne discuta la natura qualitativa.

   (f) Si identifichino i dati iniziali per cui il moto *complessivo* del sistema è periodico.

   (g) Si risolva il moto per quadrature.

SOLUZIONE

   (a) Nel sistema di riferimento descritto in figura (con l'asse x coincidente con la guida orizzontale, e l'asse y orientato verticalmente verso l'alto), le coordinate della massa puntiforme m_1 sono

$\mathbf{r}_1 = (x, 0)$, e quelle della massa m_2 sono $\mathbf{r}_2 = (x+\ell \sin\phi, -\ell\cos\phi)$. Le velocità corrispondenti sono $\dot{\mathbf{r}}_1 = (\dot{x}, 0)$, e quelle della massa m_2 sono $\dot{\mathbf{r}}_2 = (\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi, \ell\dot{\phi}\sin\phi)$, cosicché l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left[(\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\ell\dot{\phi}\sin\phi)^2\right]$$

L'energia potenziale (gravitazionale) è $V = -m_2 g\ell\cos\phi$, quindi la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L}(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}) = T - V = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left[(\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\ell\dot{\phi}\sin\phi)^2\right] + m_2 g\ell\cos\phi$$

(b) Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \quad (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ell\ddot{\phi}\cos\phi - m_2\ell\dot{\phi}^2\sin\phi = 0 \\
&\frac{d}{dt}\left[m_2\ell\dot{x}\cos\phi + m_2\ell^2\dot{\phi}\right] = -m_2 g\ell\sin\phi - m_2\ell\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi \quad \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \quad m_2\ell\ddot{x}\cos\phi + m_2\ell^2\ddot{\phi} = -m_2 g\ell\sin\phi
\end{aligned}$$

(c) La coordinata x è ciclica, e quindi il momento $p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi)$ coniugato alla variabile x è conservato, come evidente dalla prima delle due equazioni di Eulero-Lagrange. Quindi, chiamando A il valore (conservato) del momento p_x,

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2\ell\dot{\phi}\cos\phi = A \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{A - m_2\ell\dot{\phi}\cos\phi}{m_1 + m_2}$$

(d) L'energia meccanica del sistema è

$$E = T + V = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left[(\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\ell\dot{\phi}\sin\phi)^2\right] - m_2 g\ell\cos\phi$$

Sostituendo l'espressione di $\dot{x}$ in termini di $A, \phi, \dot{\phi}$ ricavata al punto precedente troviamo (si noti che $\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi = \frac{A + m_1\ell\dot{\phi}\cos\phi}{m_1 + m_2}$)

$$E = \frac{m_1}{2}\frac{(A - m_2\ell\dot{\phi}\cos\phi)^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2}{2}\frac{(A + m_1\ell\dot{\phi}\cos\phi)^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2}{2}\ell^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi - m_2 g\ell\cos\phi$$

Sviluppando i quadrati si trova:

$$E - \frac{A^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{2}\ell^2\dot{\phi}^2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) - m_2 g\ell\cos\phi$$

o, equivalentemente, ponendo $E' = E - \frac{A^2}{2(m_1+m_2)}$,

$$E' = \frac{m_2}{2}\ell^2\dot{\phi}^2\Big(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\phi\Big) - m_2 g\ell\cos\phi$$

(e) L'equazione delle curve di livello nel piano $(\phi, \dot{\phi})$ si ottiene invertendo l'equazione per E' appena ricavata:

$$\dot{\phi} = \pm\sqrt{\frac{2}{m_2\ell^2}\frac{E' + m_2 g\ell\cos\phi}{1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\phi}}$$

Qualitativamente, i grafici delle curve di livello al variare di E' hanno la stessa forma di quelli del pendolo semplice:

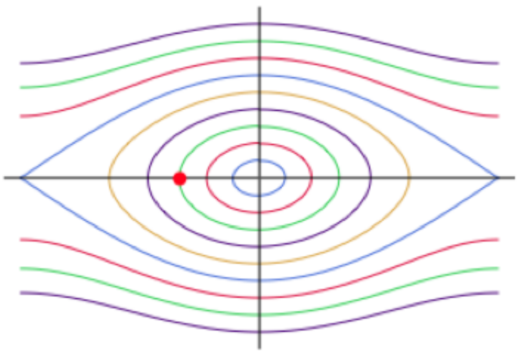


Figura 1: Forma qualitativa delle curve di livello nel piano $(\phi, \dot{\phi})$

La natura qualitativa del moto è quindi la stessa del pendolo semplice: il sistema ammette due punti di equilibrio: $\phi = 0$ (stabile) e $\phi = \pi$ (instabile). I moti corrispondenti a livelli di energia intermedi tra $E' = -m_2 g\ell$ (corrispondente al punto di equilibrio stabile) e $E' = +m_2 g\ell$ (corrispondente al punto di equilibrio instabile) sono periodici e consistono in oscillazioni attorno a $\phi = 0$. Per $E' = +m_2 g\ell$ il sistema ammette un moto non banale, oltre a quello costante sul punto di equilibrio instabile: tale moto (moto sulla separatrice) è aperiodico, consiste in un giro completo del pendolo (in tempo infinito) ed è asintotico a $\phi = \pi$ sia nel passato che nel futuro. Infine, per $E' > m_2 g\ell$ i moti sono tutti periodici e "aperti", ovvero il pendolo ruota sempre nello stesso verso, o orario o antiorario.

(f) Condizione necessaria affinchè il moto complessivo del sistema (i.e., della variabile (x, ϕ)) sia periodico, è che il moto di ϕ sia periodico. Supponiamo quindi che questo sia il caso (i valori di E' corrispondenti a moti periodici di ϕ sono stati discussi al punto precedente) e chiamiamo $\phi(t)$ tale moto periodico. L'equazione per la variabile x è

$$\dot{x} = \frac{A - m_2 \ell \dot{\phi} \cos\phi}{m_1 + m_2}$$

Integrando membro a membro nel tempo (notando che il membro di destra è la derivata totale rispetto al tempo di $(At - m_2 \ell \sin\phi(t))/(m_1 + m_2)$) troviamo

$$x(t) = x(0) + \frac{At - m_2 \ell (\sin\phi(t) - \sin\phi(0))}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

che è periodico se e solo se $A = 0$.

(g) La soluzione per quadrature del moto della variabile angolare è

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m_2 \ell^2}{2}} \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\phi}{E' + m_2 g \ell \cos\phi}} d\phi$$

dove l'intervallo di tempo tra t_0 e t non contiene un punto di inversione, e il segno da scegliere è lo stesso di $\dot{\phi}$. Una volta risolto il moto di ϕ per quadrature, la soluzione per $x(t)$ è fornita dall'eq.(1).

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot q) = -\sqrt{1-\dot q^2} + Eq,$$

con $q \in \mathbb{R}$, $|\dot q| < 1$ ed $E > 0$.

(a) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Si determinino l'Hamiltoniana $H(q,p)$ coniugata a $\mathcal{L}$ e le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Si risolvano le equazioni del moto con dati iniziali generici $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$.

(d) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi che mappi l'Hamiltoniana $H(q,p)$ in $\tilde H(Q,P) = P$.

(e) Si verifichi che, se $P + Eq \geq 1$, la funzione

$$S(q,P) = \frac{1}{E} f(P+Eq),$$

con

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\,\right)\right]$$

risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi.

(f) Si scriva la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice $S(q,P)$ del punto precedente.

(g) Si risolvano le equazioni di Hamilton per la nuova Hamiltoniana $\tilde H(Q,P) = P$, e si usi la trasformazione di cui al punto precedente per riesprimere la soluzione in termini delle variabili (q,p). Si riconosca che la soluzione così trovata coincide con quella di cui al punto (c).

SOLUZIONE

(a) L'equazione di Eulero-Lagrange del sistema è

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot q}{\sqrt{1-\dot q^2}} = E$$

Si noti che l'espressione sotto segno di derivata al membro di sinistra è il momento coniugato a q:

$$p = \frac{\dot q}{\sqrt{1-\dot q^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot q = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

(b) Usando l'espressione del momento coniugato p in funzione di $\dot{q}$ e della sua funzione inversa, ricavate al punto precedente, troviamo

$$\begin{aligned} H(q,p) &= p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})\Big|_{\dot{q}=p/\sqrt{1+p^2}} \\ &= \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1-\frac{p^2}{1+p^2}} - Eq \end{aligned}$$

cosicché, semplificando, troviamo

$$H(q,p) = \sqrt{1+p^2} - Eq$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ \dot{p} = E \end{cases}$$

(c) L'equazione per p si risolve banalmente: $p(t) = p_0 + Et$. Sostituendo tale espressione nell'equazione per q troviamo

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \int_0^t \frac{p_0 + Et'}{\sqrt{1+(p_0+Et')^2}} dt' \\ &= q_0 + \frac{1}{E}\Big(\sqrt{1+(p_0+Et)^2} - \sqrt{1+p_0^2}\,\Big) \end{aligned}$$

(d) L'equazione di Hamilton-Jacobi che mappa $H(q,p)$ in $\tilde{H}(Q,P) = P$ è

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2} - Eq = P \qquad (2)$$

dove $S = S(q,P)$. Si noti che tale equazione può ammettere soluzione solo se $P + Eq \geq 1$.

(e) Derivando $S(q,P) = \frac{1}{E} f(P+Eq)$ rispetto a q troviamo (notando che, come è facile verificare, $f'(x) = \sqrt{x^2-1}$)

$$\frac{\partial S(q,P)}{\partial q} = f'(P+Eq) = \sqrt{(P+qE)^2 - 1}$$

Rimpiazzando tale espressione nella (2) e ricordando che $P+Eq \geq 1$ si vede che la (2) è soddisfatta identicamente. Questo implica che la trasformazione canonica con funzione generatrice $S(q,P)$ mappa $H(q,p)$ in $\tilde{H}(Q,P) = P$.

(f) La trasformazione canonica associata alla funzione generatrice $S(q, P)$ è tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial S(q,P)}{\partial q} = f'(P + Eq) = \sqrt{(P + qE)^2 - 1} \\ Q = \frac{\partial S(q,P)}{\partial P} = \frac{1}{E} f'(P + Eq) = p/E \end{cases}$$

Invertendo tale relazione troviamo (ricordando ancora che $P + Eq \geq 1$)

$$\begin{cases} Q = p/E \\ P = \sqrt{p^2 + 1} - qE \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} q = \frac{1}{E}\Big(\sqrt{E^2Q^2 + 1} - P\Big) \\ p = EQ \end{cases} \tag{3}$$

(g) Le equazioni di Hamilton per $\tilde{H}(Q, P) = P$ sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = 1 \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$

che sono risolte banalmente da $Q(t) = Q_0 + t$, $P(t) = P_0$. Rimpiazzando tale soluzione nella (3) troviamo

$$\begin{cases} q(t) = \frac{1}{E}\Big(\sqrt{(EQ_0 + Et)^2 + 1} - P_0\Big) \\ p(t) = EQ_0 + Et \end{cases} \tag{4}$$

Si noti che $q_0 = \frac{1}{E}\Big(\sqrt{E^2Q_0^2 + 1} - P_0\Big)$ e $p_0 = EQ_0$. Sostituendo tali relazioni nella (4), si riconosce immediatamente che la (4) coincide con la soluzione trovata al punto (c).